Semántica de Lógicas Relevantes

Manuel M. Fidel y Víctor Fernández
Universidad del Sur y Universidad de San Juan

Abstract

La implicación relevante (ver, por ejemplo, Anderson, A. y Belnap, N., Entailment, Princeton University Press, 1975), ha sido propuesta como una solución a las paradojas de la implicación material. El tema ha sido ampliamente tratado desde un punto de vista sintáctico siendo en cambio pocas veces estudiado su aspecto semántico.

Se propone aquí una semántica asociada a los criterios de la lógica relevante, fundada en la idea de deducción restringida (no deben haber premisas innecesarias).

Con esta idea, se crea un algoritmo para decidir la validez de una fórmula bien formada de la lógica relevante. Además se propone un modelo acorde a la idea de validez en la relevancia. Restaría probar la completitud de dicha semántica con respecto al sistema R.

1 Introducción

El concepto de 'lógica relevante' fué desarrollado básicamente por Anderson y Belnap [1] y expresado en forma sintáctica (ver también [3]). Esto es, se presentaron varios sistemas posibles, de forma axiomática, para la idea de relevancia. La idea básica de la implicación relevante es que una fórmula que contenga el conectivo '$\Rightarrow$' (que se puede leer 'implicación relevante ') es válida si y sólo si las partes de $A \Rightarrow B$ tienen relación entre sí. Esto es, el antecedente A debe ser relevante (importante) para hacer posible el consecuente B. Podemos indicar algunos ejemplos:
Fórmulas válidas:

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

Fórmulas no válidas:

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((C \Rightarrow D) \Rightarrow (A \Rightarrow C)))$$
$$A \land \neg A \Rightarrow B$$
$$B \Rightarrow A \lor \neg A$$

En los ejemplos anteriores, el primer ejemplo válido y el primer no válido dan la idea que la lógica relevante no admite 'premisas sobrantes'. Esta es una idea fundamental de la lógica. Con ella trabajaremos en un principio. Como ya se expresó, Anderson y Belnap [1] trabajaron en forma sintáctica, si bien intentaron darle una estructura semántica acorde a los axiomas. Aparentemente, esto no se logró bien porque hay autores (por ejemplo, [4]) opinan que las lógicas relevantes carecen todavía de una semántica adecuada y de correspondientes criterios de decidabilidad. Justamente, ha sido la idea de hallar criterios de decidabilidad lo que ha impulsado a este trabajo. En el estudio de la lógica relevante se ha utilizado la lógica clásica, si bien hay lógicas relevantes basadas en lógicas no clásicas.

2 Semántica a partir de la idea de Deducción Relevante

Como quedó expresado en la Introducción, una idea básica en la lógica relevante es no permitir 'premisas sobrantes'. Luego, la primera idea fue 'traducir'las fórmulas $A_1 \Rightarrow (\ldots(A_n \Rightarrow B)\ldots)$ a la expresión metalógica $A_1, \ldots, A_n \models B$. En esta expresión puede verse con facilidad cuando sobran las hipótesis. Así, por ejemplo, $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$ es válido en la lógica clásica y también en la lógica relevante. Sin embargo, $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, D \models A \Rightarrow C$ no es válida en la lógica relevante (ya que sobra D), mientras que si es válida en la lógica clásica. A partir de esta distinción y de su posterior análisis, se define lo que sigue:
Dadas $A_1, \ldots, A_n$ y B, fórmulas bien formadas del cálculo proposicional clásico, diremos que de $A_1, \ldots, A_n$ se deduce relevantemente B, y escribiremos $\{A_1, \ldots, A_n\} \models_R B$ si, y sólo si, se cumplen las siguentes condiciones:

$\{A_1, \ldots, A_n\} \models B$, esto es, B se deduce clásicamente de $\{A_1, \ldots, A_n\}$.

Para todo $i = 1, \ldots, n$ existe una valuación v_i tal que:
$v_i(A_j) = 1$ para $i \neq j$ y $v_i(\neg A_i) = 1$

Una expresión más informal de la definición es la siguiente:
$\{A_1, \ldots, A_n\} \models_R B$ si, y sólo si,

$\{A_1, \ldots, A_n\} \models B$, y

$\{A_1, \ldots, \neg A_i, \ldots, A_n\} \not\models B$

La última condición puede expresarse así: Si a una premisa la cambio por su negación, B no puede deducirse clásicamente a partir del nuevo conjunto de premisas.

2.1 Ejemplos

Como el tratamiento de la lógica relevante se basa hasta ahora en la deducción de la lógica clásica, todo el análisis de los ejemplos se hará con las tablas de verdad de la lógica clásica.

Ejemplo 1: $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models_R A \Rightarrow C$
Para este ejemplo damos a cada premisa el valor de su fórmula negada.

c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8	
A	B	C	$A \Rightarrow B$	B$\Rightarrow C$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$\neg(B \Rightarrow C)$	$A \Rightarrow C)$	
0	0	0	1	1	0	0	1	f1
0	0	1	1	1	0	0	1	f2
0	1	0	1	0	0	1	1	f3
0	1	1	1	1	0	0	1	f4
1	0	0	0	1	1	0	0	f5
1	0	1	0	1	1	0	1	f6
1	1	0	1	0	0	1	0	f7
1	1	1	1	1	0	0	1	f8

El primer requisito se cumple (ver c4, c5 y c8). Además, para la premisa $A \Rightarrow B$ vale que $\{\neg(A \Rightarrow B), B \Rightarrow C\} \not\models A \Rightarrow C$ clásicamente (basta ver en f5 las columnas c5, c6 y c8). Lo mismo ocurre para $B \Rightarrow C$, pues $\{\neg(B \Rightarrow C), A \Rightarrow B\} \not\models A \Rightarrow C$ clásicamente (ver en f7 las columnas c4, c7 y c8).

Ejemplo 2. $\{A \Rightarrow B, A, C\} \not\models_R B$
Aquí, la idea básica es que 'sobra' C en el conjunto de premisas y, de acuerdo

a la definición, lo comprobamos con todas las tablas de verdad correspondientes.

c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	
A	B	C	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$\neg A$	$\neg C$	
0	0	0	1	0	1	1	f1
0	0	1	1	0	1	0	f2
0	1	0	1	0	1	1	f3
0	1	1	1	0	1	0	f4
1	0	0	0	1	0	1	f5
1	0	1	0	1	0	0	f6
1	1	0	1	0	0	1	f7
1	1	1	1	0	0	0	f8

Si bien vale que $\{\neg A, A \Rightarrow B, C\} \not\models B$, y también que $\{A, \neg(A \Rightarrow B), C\} \not\models_R B$, puede observarse que $\{A, A \Rightarrow B, \neg C\} \models B$ (ver, en la fila f7, las columnas c1, c2, c4 y c7). Esto quiere decir que C es una premisa *irrelevante.*

Ejemplo 3. Como resultado curioso, pero al mismo tiempo valioso, puede verse que $\{A \wedge B\} \models_R B$, mientras que $\{A, B\} \not\models_R B$. En efecto, veamos las correspondientes tablas de verdad:

c1	c2	c3	c4	
A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	
0	0	0	1	f1
0	1	0	1	f2
1	0	0	1	f3
1	1	1	0	f4

De la primera fila y las columnas c2 y c3, puede verse que $\{\neg(A \wedge B)\} \not\models B$.

c1	c2	c3	
A	B	$\neg A$	
0	0	1	f1
0	1	1	f2
1	0	0	f3
1	1	0	f4

Por la segunda fila, puede verse que $\{\neg A, B\} \models B$. Luego, A es una hipótesis irrelevante.

ción. Puede resultar incómoda la distinción entre $\{A, B\} \models A$ y $\{A \wedge B\} \models A$. Anderson y Belnap [1] coinciden con los resultados de este ejemplo. Podemos buscar una fundamentación filosófica de esta diferencia. Una posible respuesta puede ser que en $\{A \wedge B\}$ la información contenida es distinta que la de $\{A, B\}$, ya que en el primer caso viene en un paquete indivisible, mientras que en el segundo podría eliminarse B, por ejemplo.

3 Teorema de la deducción y su validez

Una vez expresada la idea de 'deducción relevante ', se debería probar el teorema de la deducción para la deducción relevante. La razón de esto es definir las fórmulas válidas en la lógica relevante como las fórmulas A tales que $\emptyset \models_R A$. Sin embargo, el teorema de la deducción *no vale* para la definición de $\models_R$. Lo que sívale es una de las implicaciones constituyentes del teorema de la deducción, precisamente la implicación que se necesita para definir tautologías. Para ello se prueba el siguiente:
Lema. Si $\{A_1, \ldots, A_n\} \models_R B$ entonces $\{A_1, \ldots, A_{n-1}\} \models_R (A_n \Rightarrow B)$. Demostración.

$$\{A_1, \ldots, A_n\} \models_R B, \text{ por hipótesis.} \tag{1}$$

$$\text{De (1), } \{A_1, \ldots, A_n\} \models B. \tag{2}$$

De (1),

$$\forall i = 1, \ldots, n\ \exists v_i \text{ tal que } v_i(A_j) = 1\ \forall j \neq i, v_i(\neg A_i) = 0 \text{ y } v_i(B) = 0. \tag{3}$$

Por el teorema de la deducción de la lógica clásica,

$$\{A_1, \ldots, A_{n-1}\} \models (A_n \Rightarrow B) \tag{4}$$

De (3),

$$\forall i = 1, \ldots, n-1\ \exists v_i \text{ tal que} \tag{5}$$

$$v_i(A_j) = 1\ j \neq i, i = 1, \ldots, n-1,$$

$$v_i(A_n) = 1, v_i(\neg A_i) = 1, \text{ y}$$

$$v_i(B) = 0$$

De (5) se tiene que:

$$\forall i = 1, \ldots, n-1 \text{ vale que } v_i(A_n \Rightarrow B) = v_i(A_n) \Rightarrow v_i(B) = 1 \Rightarrow 0 = 0 \quad (6)$$

De (6) y (5) se tiene:

$$\forall i = 1, \ldots, n-1 \; \exists v_i \text{ tal que} \quad (7)$$

$v_i(A_j) = 1 \; \forall j \neq i, j = 1, \ldots, n-1,$

$v_i(\neg A_i) = 1$ y

$v_i(A_n \Rightarrow B) = 0$

Luego,

$$\{A_1, \ldots, A_{n-1}\} \models_R (A_n \Rightarrow B) \quad (8)$$

Observación. La recíproca del Lema, que completaría la demostracón del teorema de la deducción no es válida. Esto es, no se cumple que si $\{A_1, \ldots, A_{n-1}\} \models_R (A_n \Rightarrow B)$ entonces $\{A_1, \ldots, A_n\} \models_R B$.

Ejemplos. Veamos casos donde $\{A_1, \ldots, A_{n-1} \models_R A_n \Rightarrow B$ pero no vale que $\{A_1, \ldots, A_n \models_R B$:

(1) $\{A\} \models_R (B \Rightarrow A)$, pero no vale que $\{A, B\} \models_R A$

(2) $\{X, X \Rightarrow Y\} \models (Z \Rightarrow Y)$ y sin embargo no vale que $\{X, X \Rightarrow Y, Z\} \models_R Y$

(3) $\{X, \neg X\} \models_R B \Rightarrow C$ pero no vale que $\{X, \neg X, B\} \models_R C$

Es curioso que los ejemplos (1) y (2) se basan en la validez en la lógica clásica de $A \rightarrow (B \rightarrow A)$, mientras que el ejemplo (3) se basa en la validez de $A \wedge \neg A \rightarrow B$. *Ambos axiomas son cuestionados (y no aceptados como válidos) por Anderson y Belnap [1].* Esta situación nos indicaría que estamos en el buen camino pero debemos restringir más la definición de $\models_R$ para que casos como $\{A, \neg A\} \models_R B$ y $\{A\} \models_R (B \Rightarrow A)$ no sean considerados como válidos.

4 Algoritmo para encontrar fórmulas válidas en lógica relevante

Veamos un algoritmo para la idea de deducción relevante.
Algoritmo. Para saber si una fórmula A es válida en lógica relevante se procede de la siguiente forma:

a) Escribir A como $A = A_1 \rightarrow A_2$ (siempre puede hacerse porque $\{\rightarrow, \neg\}$ es un conjunto adecuado de conectivas).

b) $A = A_1 \rightarrow A_2$ es válida si $A_1 \models_R A_2$.

La justificación del algoritmo es trivial. Debido al lema anterior, si $A_1 \models_R A_2$ entonces $\emptyset \models_R (A_1 \rightarrow A_2)$, y así se tiene la tautología $A_1 \rightarrow A_2 = A$.

Nótese que el problema mencionado en fallas no afecta el uso del algoritmo porque al no valer (por $\models_R$) $\{A, B\} \models_R A$, luego tampoco vale (por definición) $\{A\} \models_R (B \rightarrow A)$ y tampoco vale $\emptyset \models_R A \rightarrow (B \rightarrow A)$, con lo que $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ carece de validez (como querían Anderson y Belnap).

5 Valuación relevante

Esta valuación fue sugerida por Manuel Fidel y consiste en calcular los valores de v^R de acuerdo al algoritmo anterior. Se introducen otras valuaciones tales como v^+ y v^-, esta última con propiedades adecuadas para la negación, análogo a la construcción de Fidel-Vakarelov (ver [2]).Eso serviría para evaluar cualquier fórmula.

6 Conclusiones

La diferencia entre nuestro enfoque de la semá ntica y los tradicionales es que aquí usamos un algoritmo para hallar el valor de una fórmula en vez de una simple función.

De acuerdo a esta semántica, la lógica relevante será interpetable como una lógica en la cual las deducciones no tienen premisas sobrantes, y la negación tiene características paraconsistentes (ver [5]). No necesitamos el concepto de conexión entre fórmulas de Anderson y Belnap.

En otro trabajo ampliaremos esta semántica para cubrir los casos de las otras conectivas de la lógica relevante. También demostraremos la consistencia y completitud con respecto a esta semántica de lo lógica relevante R de Anderson y Belnap.

References

[1] Anderson, A.R. y Belnap, N.D., *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, vol. I, Princeton University Press, Princeton,1975.

[2] Fidel, M.M.,"An algebraic study of a propositional system of Nelson",*Mathematical Logic: proceedings of the first brazilian conference*, Arruda,A.I., da Costa,N.C.A, Chuaqui,R.(Eds.), Marcel Dekker, Inc.,1978, p.99-117.

[3] Mares, E.D., "Logic, Relevance", *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 1999 Edition), Zalta, E.N.(ed.), URL=http://plato.stanford.edu/entries/logic-relevance/

[4] Pogorzelski, W.A., *Notions and Theorems of Elementary Formal Logic*, Warsaw University, Bialystok, 1994.

[5] Priest, G. y Tanaka, K., "Paraconsistent Logic",*Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 1999 Edition), Zalta, E.N.(ed.), URL=http://plato.stanford.edu/entries/logic-paraconsistent/

Manuel M. Fidel
Departamento de
Ciencias del Computación
Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca

Víctor L. Fernández
Instituto de Ciencias Básicas
Facultad de Filosofía, Humanidades y Artes
Universidad Nacional de San Juan
San Juan