Notas del curso:

DISTRIBUCION DEL MAXIMO DE UN PROCESO GAUSSIANO. EL METODO DE RICE

Mario Wschebor

IV CONGRESO

"Dr. ANTONIO A. R. MONTEIRO"

1997

DISTRIBUCION DEL MAXIMO DE UN PROCESO GAUSSIANO. EL METODO DE RICE

CONFERENCIA Nº 1

Sea $X = \{X_t : t \in [0,1]\}$ un proceso estocástico a valores reales y con trayectorias continuas, definido en un espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. El propósito de estas tres conferencias es el estudio de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $M = \text{máx}\{X_t : t \in [0,1]\}$.

No se conocen fórmulas cerradas para el cálculo de la distribución de M, salvo para un conjunto muy restringido de procesos particulares -y de funciones triviales de éstos- a saber:

el movimiento browniano W_t, el puente browniano $B_t = W_t - t\,W_1$ $(0 \leq t \leq 1)$, $B_t - \int_0^1 B_s\,ds$,

la integral indefinida de $W_{(1)}$, un proceso gaussiano estacionario con covariancia triangular y una sinusoide gaussiana con amplitud y fase aleatorias. (Ver [1]).

Dada la importancia del cálculo de la distribución de M para una gran diversidad de aplicaciones, el tratamiento del tema a través de una extensa literatura ha sido orientado, especialmente en el caso en que X es un proceso gaussiano, hacia:

1) Obtener cotas superiores e inferiores de $P(M > u)$, para $u \nearrow +\infty$ ([19], [20]), para lo cual existen diversos métodos clásicos, entre los cuales se destacan el llamado método de Dudley-Fernique [9], y los basados en desigualdades isoperimétricas ([5], [11], [12]).

2) Obtener desigualdades exactas para cada **u**. Aquí, además de las desigualdades isoperimétricas existe una variedad de métodos *ad-hoc* bajo condiciones especiales para el proceso X.

3) Estudiar la regularidad de la distribución de M y, en particular, de su densidad.

4) La exigencia práctica de calcular $P(M > u)$ y el hecho de que, en general, los métodos precedentes son insatisfactorios, conduce a que en una amplia gama de situaciones el procedimiento consiste en calcular $P(M > u)$ usando Monte-Carlo, mediante simulación de aproximaciones de las trayectorias de X.

Además de ser usualmente pobre en el plano teórico, la simulación de trayectorias de procesos estocásticos de parámetro continuo es complicada y costosa, aún en el caso de los procesos gaussianos.

Ejemplos relevantes de situaciones prácticas en las que el cálculo de la distribución de M es requerido provienen de la ingeniería y de las ciencias físicas, cuando $\{M > u\}$ denota un suceso "crítico" cuya probabilidad es un parámetro determinante de condiciones de diseño o de control, o de la estadística asintótica, en la que con frecuencia una prueba de hipótesis consiste en rechazar la hipótesis nula cuando $\{M > u\}$ y el proceso X es gaussiano.

Si bien una buena parte del método que habremos de exponer se aplica naturalmente a procesos que no son gaussianos, estaremos pensando en éstos todo el tiempo. No haremos referencia a algunas aplicaciones a procesos no gaussianos, que requieren ingredientes adicionales algo distantes de la línea principal de la exposición. Existen viejos antecedentes del "método de Rice" en contextos relacionados a lo que vamos a exponer, aunque los resultados principales son recientes. (Ver, por ejemplo, Rice [21], Longuett-Higgins [13], Miroshin [16], [17]).

Algunos resultados se extienden al caso en que el proceso $\mathcal{X}$, en lugar de ser de un parámetro es de varios parámetros (o, si se quiere, sus trayectorias son funciones de varias variables). No haremos referencia a este importante problema en lo que sigue.

Las exposiciones están organizadas de la manera siguiente:

En la PRIMERA, expondremos las llamadas "fórmulas de Rice". Una referencia general es [21] y una presentación clásica para procesos de un parámetro es [6]. Ver también [14].

La SEGUNDA conferencia estará dedicada a las fórmulas exactas para el cálculo de $P(M > u)$ y a las cuestiones numéricas asociadas.

La TERCERA estará dedicada a la aplicación de métodos análogos para el estudio de la densidad de la distribución de M.

1. FORMULAS DE RICE.

NOTACIÓN. Sea $f: I \to R$ una función definida en el intervalo I de los reales, a valores reales. Usaremos normalmente la notación

$$C_u\ (f ; I) = C_u = \{ t : f(t) = u , t \in I \}$$

$$N_u\ (f ; I) = \# (C_u) = N_u ,$$

(donde "#" indica el número de puntos si C_u es finito, e infinito en caso contrario). Habitualmente N_u es el "número de cruces" de **f** con el nivel **u** sobre el intervalo **I**.

Del mismo modo, si f es derivable se define el número de "cruces hacia arriba" (resp. hacia abajo).

$$U_u = U_u (f ; I) = \# (\{ t : f(t) = u ,\ \dot{f}(t) > 0, t \in I \})$$

$$(\text{resp. } D_u = D_u (f ; I) = \# (\{ t : f(t) = u ,\ \dot{f}(t) < 0, t \in I \})).$$

("upcrossings" y "downcrossings", respectivamente).

Emplearemos de manera repetida la notación

$$p_{\xi,\eta,\zeta,\dots} (x, y, z, \dots)$$

para la densidad conjunta de las variables aleatorias ξ , η , ζ , ... en el punto (x, y, z, ...) supuesto, naturalmente, que dicha densidad existe.

TEOREMA 1.1. (FÓRMULA DE RICE 1). Sea $\mathcal{X}= \{X_t : t \in [0,1] \}$ un proceso estocástico[1] a valores reales, I un intervalo compacto en $\mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}$. Admitimos que para casi todo ω , la función $\mathbf{t} \to \mathbf{X}_t(\omega)$ es de clase $\mathbf{C}^2$. Además, para todo $\mathbf{t} \in \mathbf{I}$ las parejas $(X_t,\dot{X}_t)$, $(\dot{X}_t,\ddot{X}_t)$ tienen densidad y

$$p_{X_t}(x) \qquad \text{(respectivamente} \quad p_{\dot{X}_t}(\dot{x}) \text{)}$$

es acotada para $\mathbf{t} \in \mathbf{I}$ y $\mathbf{x}$ en un entorno de $\mathbf{u}$ (resp. $\dot{\mathbf{x}}$ en un entorno de 0)

$$(t , x) \to \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{x}|\, p_{X_t,\dot{X}_t}(x,\dot{x})\, d\dot{x} \qquad (H)$$

[1]En todos los casos supondremos que la función $(t,\omega) \to X_t(\omega)$ es medible.

$$(t,\dot{x}) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |\ddot{x}|\, p_{\dot{X}_t,\ddot{X}_t}(\dot{x},\ddot{x})\, d\ddot{x} \qquad (\text{H'})$$

son funciones a valores reales, continuas para $t \in I$ y x en un entorno de u (resp. $\dot{x}$ en un entorno de 0). Entonces,

$$E\{N_u(X;I)\} = \int_I dt \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{x}|\, p_{X_t,\dot{X}_t}(u,\dot{x})\, d\dot{x} \qquad (1)$$

Demostración:

PASO 1. (Lema de Bulinskaia, 1961).

Sea $T_u^X = \{t : t \in I, X_t = u, \dot{X}_t = 0\}$. Probemos que $P(T_u^X \neq \emptyset) = 0 \qquad (2)$

Sea ℓ la longitud de **I** y **C** una cota de $P_{X_t}(x)$ para $t \in I$ y x en un cierto entorno de **u**. Definimos:

$$B = B(\epsilon,\delta) = \left\{ \sup_{\substack{t',t'' \in I \\ |t''-t'| \leq \delta}} |\dot{X}(t'') - \dot{X}(t')| \geq \epsilon \right\}.$$

Dado $\epsilon > 0$, elegimos $\delta > 0$ tal que $P(B(\epsilon,\delta)) < \epsilon$, lo cual es posible, ya que excluyendo un conjunto de probabilidad nula, las trayectorias son de clase C^1.

Sea además $t_0, t_1, \ldots, t_n$ la partición de **I** tal que $t_h - t_{h-1} = \ell / n$ $(h = 1, \ldots, n)$ $I = [t_0, t_n]$, $I_h = [t_{h-1}, t_h]$. Entonces:

$$P(T_u^X \neq \emptyset) \leq P(B) + \sum_{h=1}^{n} P(\{T_u^X \cap I_h \neq \emptyset\} \cap B^c) \leq$$

$$\leq P(B) + \sum_{h=1}^{n} P(|X_{t_h} - u| \leq \epsilon \frac{\ell}{n}) = P(B) + \sum_{h=1}^{n} \int_{|x-u| \leq \epsilon \frac{\ell}{n}} p_{X_{t_h}}(x)\, dx < \epsilon + C\epsilon\ell$$

si hemos tenido la precaución de que $\ell/n < \delta$. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, esto prueba (2).

PASO 2. De acuerdo al **PASO 1**, dado el nivel $u \in \mathbb{R}$, podemos excluir un conjunto de trayectorias con probabilidad nula, de modo que las restantes no tienen puntos críticos en que toman el valor **u**. Para cada una de estas trayectorias, se verifica:

$$N_u(X;I) = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_I \mathbb{I}_{\{t: |X_t - u| < \delta\}} |\dot{X}_t|\, dt \qquad (3)$$

La verificación de (3) queda a cargo del lector, que observará además que para las trayectorias sin puntos críticos con valor **u**, $N_u(X, I) < \infty$.

PASO 3. Dado que (3) vale para casi todo ω, el lema de Fatou, el teorema de Fubini y la hipótesis (H) implican:

$$E\{N_u(X;I)\} = E\{\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_I \mathbb{I}_{\{t: |X_t - u| \leq \delta\}} |\dot{X}_t|\} dt \leq \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_I E\{\mathbb{I}_{\{t: |X_t - u| \leq \delta\}} |\dot{X}_t|\} dt =$$

$$= \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_I dt \int_{u-\delta}^{u+\delta} dx \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{x}|\, p_{X_t,\dot{X}_t}(x,\dot{x})\, d\dot{x} = \int_I dt \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{x}|\, p_{X_t,\dot{X}_t}(u,\dot{x})\, d\dot{x}$$

PASO 4. Para probar (1), basta probar la desigualdad inversa a la del paso (3). Esta última muestra que

$N_u(X, I) \in L^1$ [2]

En vista del paso (2) alcanza con ver que:

$$\frac{1}{2\delta}\int_I \mathbb{I}_{\{|X_t - u| \le \delta\}} |\dot{X}_t| \, dt$$

está mayorada por una función de L^1, independientemente de $\boldsymbol{\delta}$. En efecto (la verificación queda a cargo del lector):

$$\frac{1}{2\delta}\int_I \mathbb{I}_{\{|X_t - u| \le \delta\}} |\dot{X}_t| \, dt \le N_0(\dot{X}, I) + 1$$

Nótese que la hipótesis H' permite aplicar el resultado del **PASO 3** al proceso $\{\dot{X}_t : t \in I\}$ en lugar de X y el nivel **0** en lugar de **u**.

Eso muestra que $N_0(\dot{X}, I) \in L^1$ y además, en consecuencia, que es finito para casi todo ω.

<u>**Notas**</u> **(A).** Las hipótesis que hemos utilizado son superabundantes. Con alguna complicación adicional en la demostración se pueden flexibilizar (Ver [14], [24]).

(B). Sea X un proceso gaussiano, estacionario, centrado con covariancia Γ (i.e. $\Gamma(t) = E\{X_s X_{s+t}\}$) normalizado mediante $\Gamma(0) = 1$. Supongamos, como en el **TEOREMA 1.1.**, que c. s. las trayectorias son de clase C^2.

Es fácil ver que $\{\dot{X}_t : t \in \mathbb{R}\}$, $\{\ddot{X}_t : t \in \mathbb{R}\}$ también son procesos gaussianos, estacionarios centrados y que sus covariancias son las funciones (respectivas):

$$E\{\dot{X}_0 \dot{X}_t\} = -\ddot{\Gamma}(t) \quad , \quad E\{\ddot{X}_0 \ddot{X}_t\} = \Gamma^{(IV)}(t)$$

Puesto que Γ es par, $E\{X_t \dot{X}_t\} = \dot{\Gamma}(0) = 0$ y la gaussianidad implica que las variables aleatorias $X_t, \dot{X}_t$ son independientes. Lo mismo ocurre con la pareja $\dot{X}_t, \ddot{X}_t$. Por lo tanto,

$$p_{X_t, \dot{X}_t}(x, \dot{x}) = p_{X_0}(x) \; p_{\dot{X}_0}(\dot{x})$$

y (H) se verifica trivialmente, lo mismo que (H').

La fórmula (1) deviene:

$$E\{N_u(X, I)\} = |I| \, p_{X_0}(u) \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{x}| \, p_{\dot{X}_0}(\dot{x}) \, d\dot{x} = |I| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} E\{|\dot{X}_0|\} \qquad (4)$$

donde $\dot{X}_0$ es una variable aleatoria con distribución normal, media nula y varianza $-\ddot{\Gamma}(0)$, e $|I|$ la longitud del intervalo I.

Podemos reescribir la fórmula (4) recurriendo a los momentos espectrales del proceso. Precisamente, Γ es la transformada de Fourier de una medida μ de Borel en $\mathbb{R}$, de masa total igual a 1:

$$\Gamma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \mu(dx)$$

cuyos momentos se denotan por:

$$\lambda_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \mu(dx) \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

---

[2] Salvo indicación en contrario L^p indica $L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

La finitud de λ_{2k} es equivalente a la 2k-derivabilidad de Γ ([10]), y en ese caso

$$\lambda_{2k} = (-1)^k \, \Gamma^{(2k)}(0)$$

(4) se reescribe entonces así:

$$E\{N_u(X,I)\} = \frac{|I|}{\pi} e^{-\frac{1}{2}u^2} \sqrt{\lambda_2} \qquad (4)$$

(C) Se puede probar que la fórmula (4) es cierta para cualquier proceso gaussiano estacionario centrado con trayectorias continuas, en el sentido de que si $\lambda_2 < \infty$ vale la igualdad y si $\lambda_2 = +\infty$, el primer miembro es $+\infty$. La demostración no es difícil. (Ver [24]).

(D) Variantes sencillas del Teorema 1.1. permiten probar, bajo las mismas hipótesis , que

$$E\{U_u(X;I)\} = \int_I dt \int_0^{+\infty} \dot{x} \; p_{X_t,\dot{X}_t}(u,\dot{x})\, d\dot{x} \qquad (5)$$

y

$$E\{D_u(X;I)\} = \int_I dt \int_{-\infty}^{0} |\dot{x}| \; p_{X_t,\dot{X}_t}(u,\dot{x})\, d\dot{x} \qquad (6)$$

Análogamente, es posible dar fórmulas para la esperanza de "cruces marcados", es decir de cruces en los cuales se cumple alguna condición adicional. Por ejemplo, si $\mathcal{Y} = \{ Y_t : t \in I \}$ es otro proceso estocástico a valores reales y $-\infty \leq a < b \leq +\infty$,

$$N_u^{a,b}(X,I) = \# \{t : t \in I, X_t = u, a < Y_t < b\}$$

entonces se tiene

$$E\{N_u^{a,b}(X;I)\} = \int_a^b dy \int_I dt \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{x}| \; p_{Y_t,X_t,\dot{X}_t}(y,u,\dot{x})\, d\dot{x} \qquad (7)$$

En particular, si $\mathcal{Y}$es el propio proceso X, $D_0^{a,b}(\dot{X},I)$ es el número de máximos relativos (estrictos) de X en el intervalo I cuyo valor está comprendido entre a y b y se tiene:

$$E\{D_0^{a,b}(\dot{X};I)\} = \int_a^b dx \int_I dt \int_{-\infty}^{0} |\ddot{x}| \; p_{X_t,\dot{X}_t,\ddot{X}_t}(x,0,\ddot{x})\, d\ddot{x} \qquad (8)$$

Condiciones suficientes para la validez de (7) y (8) quedan a cargo del lector.

MOMENTOS DE ORDEN SUPERIOR DE N_u (X ; I)

Emplearemos la notación siguiente:

Para m, k enteros positivos, $m \geq k$, las "**variaciones de m de k en k**" son:

$V_k^m = m(m-1) \ldots (m-k+1)$. En caso contrario, ponemos $V_k^m = 0$.

Para **k** entero, $k \geq 2$, I un intervalo de $\mathbb{R}$, la "**diagonal de I^k** " es el conjunto:

$$D_k = \{(t_1, \ldots , t_k) : t_j \in I \;\; (i = 1, \ldots , k), t_j = t_h \text{ para alguna pareja } j, h, j \neq h \}$$

Además, para $(t_1, \ldots, t_k) \in I^k \setminus D_k$, $x_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, \ldots , k)$

$$A_{t_1,\ldots,t_k}(x_1,\ldots,x_k) = \int_{\mathbb{R}^k} p_{X_{t_1},\ldots,X_{t_k},\dot{X}_{t_1},\ldots,\dot{X}_{t_k}}(x_1,\ldots,x_k,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_k) \left[\prod_{j=1}^{k} |\dot{x}_j| \, d\dot{x}_j \right].$$

$$I_k(x_1,\dots,x_k) = \int_{I^k} A_{t_1,\dots,t_k}(x_1,\dots,x_k)\,dt_1\dots dt_k$$

donde se sobreentiende que las densidades que figuran en la definición de $A_{t_1,\dots,t_k}$ están definidas y que ambas funciones pueden tomar el valor $+\infty$.

TEOREMA 1.2. (Fórmula de Rice). Con las notaciones anteriores, supongamos que el proceso estocástico satisfaga las condiciones siguientes:

(a) $A_{t_1,\dots,t_k}(x_1,\dots,x_k)$ es finita y continua como función de sus argumentos para $(t_1,\dots,t_k) \in I^k \setminus D$ y $x_1,\dots,x_k$ en un entorno de u.

(b) La densidad $p_{X_{t_1},\dots,X_{t_k},\dot{X}_{t'_1},\dots,\dot{X}_{t'_k}}(x_1,\dots,x_k,\dot{x}_1,\dots,\dot{x}_k)$ existe para $(t_1,\dots,t_k)$

$(t'_1,\dots,t'_k)$, $\in I^k \setminus D_k$ y es continua como función de $(t_1,\dots,t_k)$ y de $(x_1,\dots,x_k)$ en $(u,\dots,u)$.

(c) (Condición técnica adicional)

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\dot{x}_1|^{k-1}\,|\dot{x}_2-\dot{x}_3|\,p_{X_{t_1},\dots,X_{t_k},\dot{X}_{t'_1},\dot{X}_{t'_2},\dot{X}_{t'_3}}(x_1,\dots,x_k,\dot{x}_1,\dot{x}_3,\dot{x}_3)\,d\dot{x}_1\,d\dot{x}_2\,d\dot{x}_3 \to 0$$

cuando $|t_2' - t_1| \to 0$, uniformemente para $(t_1,\dots,t_k)$ en cada subcompacto de $I^k \setminus D$, $x_1,\dots,x_k$ en un entorno de u.

Entonces vale la fórmula:

$$E\{V_k^{N_u(X;I)}\} = I_k(u,\dots,u) \qquad (9)$$

donde ambos miembros pueden valer $+\infty$. Es decir, con $N_u = N_u(X;I)$:

$$E\{N_u(N_u-1)\dots(N_u-k+1)\} = \int_{I^k} dt_1\dots dt_k \int_{\mathbb{R}^k} \prod_{j=1}^{k} |\dot{x}_j|\, p_{X_{t_1},\dots,X_{t_k},\dot{X}_{t_1},\dots,\dot{X}_{t_k}}(u,\dots,u,\dot{x}_1,\dots,\dot{x}_k)\,d\dot{x}_1\dots d\dot{x}_k$$

No demostraremos el teorema 1.2 (Ver [24]). Una idea de cómo proceder es la siguiente:

Se define la medida aleatoria (a valores enteros no negativos)

$$\nu(A) = \#\{(C_u \times C_u \times \dots \times C_u) \cap A]$$

y A varía en los subconjuntos borelianos de I^k.

Para cada rectángulo (producto cartesiano de intervalos compactos) contenido en I^k de la forma

$$I_1 \times I_2 \times \dots \times I_k$$

donde $I_1, I_2, \dots, I_k$ son 2 a 2 disjuntos, se prueba

$$E\{\nu(I_1\times\dots\times I_k)\} = E\{\lim_{\delta\downarrow 0} \frac{1}{(2\delta)^k} \int_{I_1\times\dots\times I_k} \prod_{j=1}^{k}\left(\mathbb{1}_{\{|X_{t_j}-u|\le\delta\}}|\dot{X}_{t_j}|\,dt_j\right)\}$$

$$= \lim_{\delta\downarrow 0} \int_{I_1\times\dots\times I_k} dt_1\dots dt_k \frac{1}{(2\delta)^k}\int_{u-\delta}^{u+\delta}\dots\int_{u-\delta}^{u+\delta} dx_1\dots dx_k\, A_{t_1,\dots,t_k}(x_1,\dots,x_k) =$$

$$= \int_{I_1\times\dots\times I_k} A_{t_1,\dots,t_k}(u,\dots,u)\,dt_1\dots dt_k$$

La dificultad radica en la segunda igualdad. Probado esto, resulta que las medidas de Borel

$$E\{\nu(A)\} \qquad ; \qquad \int_A A_{t_1,\dots,t_k}(u,\dots,u)\,dt_1\dots dt_k$$

coinciden sobre los subconjuntos A de $I^k \setminus D$ que son productos cartesianos de intervalos. Por lo tanto

$$E\{\nu(I^k \setminus D_k)\} = \int_{I^k\setminus D_k} A_{t_1,\dots,t_k}(u,\dots,u)\,dt_1\dots dt_k$$

(9) se sigue de $\nu(I^k \setminus D_k) = V_k^{N_u(X\,;\,I)}$ y del hecho que D_k tiene medida de Lebesgue nula.

NOTAS. (A). La verificación en cada caso de las hipótesis del teorema 1.2. puede plantear dificultades serias. Sin embargo, es posible dar algunos criterios generales que aseguren la verificación de esas hipótesis en casos importantes.

Si X es gaussiano centrado y casi seguramente sus trayectorias son de clase C^1, la no degeneración de las densidades

$$p_{X_{t_1},\dots,X_{t_k},\dot X_{t'_1},\dots,\dot X_{t'_l}} \qquad (t_1,\dots,t_k) \in I_k \setminus D_k \quad ; \quad (t'_1,\dots,t'_l) \in I_l \setminus D_l \quad , \; l = 3 \vee k$$

garantiza que se cumplen (a) , (b) , (c) (Cfr. [24] para la demostración, y también para otros criterios más manejables que las condiciones (a) , (b) , (c)).

Si X es gaussiano, centrado y estacionario, la condición precedente de no degeneración se verifica si la medida espectral no es puramente atómica, ([6] para la demostración).

(B) Como se indica en el enunciado del Teorema 1.2., ambos miembros de la igualdad (9) pueden valer $+\infty$. Un problema importante es el de dar condiciones generales sobre X que permitan asegurar la finitud del k-ésimo momento de $N_u(X\,;\,I)$ sin recurrir al cálculo del segundo miembro de (9) que suele ser muy complicado aún para los procesos corrientes más sencillos.

[**Disgresión.** Los momentos factoriales de N_u son combinaciones lineales de los momentos ordinarios de N_u, y recíprocamente:

$$E\{V_k^{N_u}\} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{jk} E\{N_u^{\,j}\} \qquad ; \qquad E\{N_u^{\,k}\} = \sum_{j=1}^{k} \beta_{jk} E\{V_j^{N_u}\}$$

donde los coeficientes α_{jk} y β_{jk} $(j = 1, \dots, k)$ dependen solamente de j y de k. En consecuencia, es equivalente estudiar la finitud de los momentos ordinarios o factoriales.]

Existe una extensa literatura destinada a dar condiciones sobre la covarianza del proceso X, supuesto gaussiano y estacionario que permitan asegurar la finitud de los momentos de $N_u(X\,;\,I)$ (Ver, por ejemplo [7], [15]).

El teorema siguiente da condiciones razonablemente sencillas y generales que aseguran la finitud de los momentos de $N_u(X\,;\,I)$; sin embargo, las cotas que se obtienen suelen ser groseras.

TEOREMA 1.3. ([18]). Sea $X = \{X_t : t \in I\}$ un proceso estocástico de parámetro real y valores reales, I un intervalo compacto de $\mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$ y m un entero positivo. Suponemos que c.s. las trayectorias de X son de clase C^{p+1}, $p > 2m$, y que

$$C = \sup\{p_{X_t}(x) : t \in I, u - \eta < x < u + \eta\} < \infty \qquad (10)$$

para algún $\eta > 0$.

Denotamos, además, por $Z_h = \sup\{|X_t^{(h)}| : t \in I\}$, el supremo de la h-ésima derivada de X.

Entonces,

$$E\{[N_u(X;I)]^m\} \le C_{p,m} + C_{p,m}[E\{Z_{p+1}\} + C] \qquad (11)$$

donde $C_{p,m}$ depende sólo de **p**, de **m** y de la longitud de **I**.

NOTAS.
(A) La aplicación del teorema 1.3. a los procesos gaussianos es inmediata. Si X es gaussiano con trayectorias de clase C^{p+1} y las distribuciones unidimensionales no degeneran (es decir que $Var(X_t) > 0 \ \forall \ t \in I$), entonces

$$E\{[N_u(X;I)]^m\} < \infty \qquad (12)$$

para $m < p/2$. En efecto, $E\{Z_{p+1}\} < \infty$ en virtud de resultados clásicos de la teoría de procesos gaussianos (Fernique, [9]).

En particular, si c.s. $X_{(\cdot)} \in C^\infty$, entonces (12) vale para todo $m = 1, 2, \ldots$

(B) Es claro que las conclusiones anteriores son válidas para procesos no gaussianos, toda vez que sepamos verificar condiciones del tipo $E\{Z_{p+1}\} < \infty$. Esto es posible, por ejemplo, si el proceso se obtiene mediante regularización natural de las trayectorias de semimartingalas brownianas que satisfacen ciertas condiciones. No trataremos este tema aquí, aunque se trata de ejemplos de interés significativo.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.3. Para simplificar la notación suponemos que $I = [0, 1]$. Se tiene (ponemos $N_u = N_u(X;I)$):

$$E\{N_u^m\} = \sum_{k=1}^{\infty} P(N_u^m \ge k) \le C_{p,m} + C_{p,m} \sum_{k>p^m} P(N_u^m \ge (p+1)^m k) \qquad (13)$$

Para acotar cada término de la suma, notar la inclusión:

$$\{N_u \ge (p+1)k^{1/m}\} \subset \{\exists J_k \text{ intervalo}, J_k \subset I, |J_k| = k^{-1/m}, N_u(X;J_K) \ge p+1\}$$

Del teorema de Rolle:

$$\{N_u \ge (p+1)k^{1/m}\} \subset \qquad (14)$$

$$\subset \{\exists J_k \text{ intervalo}, J_k \subset I, |J_k| = k^{-1/m} \text{ y puntos } \tau_1, \ldots, \tau_p \in J_k \text{ tales que } X_{\tau_j}^{(j)} = 0, j = 1, \ldots, p\}$$

Sea ahora $\omega_f(\cdot)$ el módulo de continuidad de la función $f: I \to \mathbb{R}$ y

$$A_k = \{N_u \ge (p+1)k^{1/m}, \omega_{X^{(p)}}(k^{-1/m}) < \varepsilon_k\},$$

eligiendo $\epsilon_k = k^{\beta - 1/m}$, $1 < \beta < \frac{p}{m} - 1$.

Es claro que:

$$\{N_u \ge (p+1)k^{1/m}\} \subset \{\omega_{X^{(p)}}(k^{-1/m}) \ge \varepsilon_k\} \cup A_k$$

y, por lo tanto, reemplazando en (13) y usando la desigualdad de Markov:

$$E\{N_u^m\} \le C_{p,m} + C_{p,m} \sum_{k>p^m} [E\{Z_{p+1}\} k^{-1/m} \frac{1}{\varepsilon_k} + P(A_k)] \le C_{p,m} + C_{p,m} [E\{Z_{p+1}\} + \sum_{k>p^m} P(A_k)]$$

(hemos conservado el nombre de las constantes , cuyo valor puede variar de línea en línea).

Sea ahora el conjunto (aleatorio) abierto:

$$V_k = \{t : |\dot{X}_t| < \varepsilon_k \, k^{-\frac{p-1}{m}}\}$$

Observemos que si $\omega \in A_k \Rightarrow J_k \subset V_k$ donde J_k es el intervalo aleatorio que figura en (14) .

En efecto, si $\omega \in A_k$ y $t \in J_k$, se tiene:

$$|X_t^{(p)}| = |X_t^{(p)} - X_{\tau_p}^{(p)}| < \varepsilon_k \quad \text{porque} \quad \omega_{X^{(p)}}(k^{-1/m}) < \varepsilon_k .$$

Del mismo modo,

$$|X_t^{(p-1)}| = |X_t^{(p-1)} - X_{\tau_{p-1}}^{(p-1)}| < \varepsilon_k \; k^{-1/m}$$

Iterando el procedimiento, resulta que

$$|\dot{X}_t| < \varepsilon_k \; k^{-\frac{p-1}{m}} \quad \text{es decir que} \quad t \in V_k.$$

En consecuencia,

$$A_k \subset \{\exists J_k \text{ intervalo}, J_k \subset I, |J_k| \quad k^{1/m}, N_u(X;J_k) \geq p+1, J_k \subset V_k\} \Rightarrow$$

$$A_k \subset \{N_u(X; I \cap V_k) \geq p+1\} \quad \text{y, en consecuencia,}$$

$$P(A_k) \leq \frac{1}{p+1} E\{N_u(X; I \cap V_k)\}$$

Observemos aún que la igualdad (3) permanece válida si en lugar de un intervalo I ponemos un abierto cualquiera. (Ejercicio). Por lo tanto:

$$N_u(X; I \cap V_k) = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_{I \cap V_k} \mathbb{1}_{\{t: |X_t - u| < \delta\}} |\dot{X}_t| \, dt$$

y aplicando el lema de Fatou, la hipótesis y la definición de V_k , resulta

$$E\{N_u(X; I \cap V_k)\} \leq \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{2\delta} E\left\{\int_I \mathbb{1}_{\{|X_t - u| < \delta\}} \varepsilon_k \, k^{-\frac{p-1}{m}} dt\right\}$$

$$= \lim_{\delta \downarrow 0} \varepsilon_k k^{-\frac{p-1}{m}} \int_I \frac{1}{2\delta}\left(\int_{u-\delta}^{u+\delta} p_{X_t}(x)\, dx\right) dt \leq C \varepsilon_k \, k^{-\frac{p-1}{m}}$$

Para terminar la demostración, basta ver que la elección de ε_k implica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \, k^{-\frac{p-1}{m}} < \infty \qquad \blacksquare$$

CONFERENCIA Nº 2

Esta exposición está dedicada a presentar algunos resultados recientes (J-M. Azaïs-M. Wschebor, [2]) que conectan la distribución del máximo con las fórmulas de Rice. Las notaciones que emplearemos son las mismas y las fórmulas de Rice que aparecen incluyen pequeñas variantes -más o menos obvias - de las que fueran expuestas anteriormente.

Introducimos adicionalmente la notación:

$$\nu_m = E\{ V_m^{U_u} \, \mathbb{1}_{\{X_0 \le u\}} \} \qquad m = 1, 2, \dots$$

para los momentos factoriales del número de "upcrossings" del proceso X con el nivel **u** sobre el intervalo **I = [0 , 1]** , cuando partimos en **t = 0** debajo de la barrera **u**.

Denotamos por $\| f \|_p$ la p-norma de la función **f** en el intervalo [0 , 1] con la medida de Lebesgue.

La fórmula de Rice para ν_m es :

$$\nu_m = \int_{I^m} dt_1 \dots dt_m \int_{-\infty}^{u} dx \; E\{ \dot X_{t_1}^+ \dots \dot X_{t_m}^+ / X_0 = x, X_{t_1} = \dots = X_{t_m} = u \} \; p_{X_0, X_{t_1}, \dots, X_{t_m}} (x, u, \dots, u) = \qquad (16)$$

$$= \int_{I^m} dt_1 \dots dt_m \int_{-\infty}^{u} dx \int_{[0,+\infty)^m} \dot x_1 \dots \dot x_m \; p_{X_0, X_{t_1}, \dots, X_{t_m}, \dot X_{t_1}, \dots, \dot X_{t_m}} (x, u, \dots, u, \dot x_1, \dots, \dot x_m) \, d\dot x_1 \dots d\dot x_m$$

a^+ es la parte positiva del número **a**. Para la validez de (16) nos remitimos a la Conferencia Nº 1.

Habremos de exponer dos teoremas. <u>El primero requiere que las trayectorias del proceso sean de clsse C^∞</u> ; en el segundo, si no lo son, procedemos en dos etapas: <u>primero las regularizamos</u> mediante un dispositivo de filtrado y luego aplicamos un método similar al del primer teorema.

TEOREMA 2.1. Supongamos que las trayectorias de X son de clase C^∞ y que $p_{X_{1/2}}$ está acotada por la constante **D** para **x** en un entorno de **u**.

(i) Si existe una sucesión $\{ c_k \}_{k = 1, 2, \dots}$ de números positivos tal que

$$\gamma_k = P(\| X^{(2k-1)} \|_\infty \ge c_k) + \frac{D \, c_k}{2^{2k-1} (2k-1)!} = o(2^{-k}) \qquad (k \to +\infty) \qquad (17)$$

entonces

$$P(M > u) = P(X_0 > u) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\nu_m}{m!} \qquad (18)$$

(ii) En la fórmula (18) el error cometido cuando se reemplaza la suma de la serie por su m_0 -suma parcial , está acotado por $\gamma^*_{m_0+1}$, donde:

$$\gamma_m^* = \sup_{k \ge m} (2^{k+1} \gamma_k)$$

Para la demostración, usaremos los lemas siguientes.

LEMA 2.1. Sea $f : [0 , 1] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^k que posea al menos **k** ceros (cada cero es contado con su multiplicidad). Entonces,

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \le \frac{1}{k!} \frac{1}{2^k} \| f^{(k)} \|_\infty .$$

Demostración. Usar la siguiente variante de la fórmula de Taylor (Ejercicio): Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ son raíces de f, iguales o distintas,

$$f(t) = \frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k}(t-\alpha_j)\,f^{(k)}(\eta) \qquad (t\in[0,1])$$

donde $\eta \in [0,1]$.

El lema siguiente, que juega un papel central en lo que sigue, es esencialmente conocido (Ver [17]). Por completitud, incluimos una demostración.

LEMA 2.2. Sea ξ una variable aleatoria con valores enteros no negativos y momentos finitos de todos los órdenes. Usamos la notación:

$$p_k = P(\xi = k) \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

$$v_m = E\{V_m^{\xi}\} \qquad (m=1,2,\ldots)$$

$$S_M = \sum_{m=1}^{M}(-1)^{m+1}\frac{v_m}{m!} \qquad (M=1,2,\ldots)$$

(i) Para cada $M = 1, 2, \ldots$:

$$S_{2M} \le \sum_{k=1}^{2M} p_k \le \sum_{k=1}^{\infty} p_k \le S_{2M+1} \tag{19}$$

(ii) $\{S_M\}$ tiene límite finito si y sólo si $\frac{v_m}{m!}\to 0$ si $m\to\infty$

y en ese caso:

$$P(\xi\ge 1) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{v_m}{m!} \tag{20}$$

Demostración: (ii) es consecuencia inmediata de (i). Probamos (i).

$$S_M = \sum_{m=1}^{M}(-1)^{m+1}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(k-1)\ldots(k-m+1)}{m!}p_k\right] = \sum_{m=1}^{M}(-1)^{m+1}\sum_{k=m}^{\infty}\binom{k}{m}p_k \Rightarrow$$

$$S_M = \sum_{k=1}^{\infty}p_k\sum_{m=1}^{m=k\wedge M}(-1)^{m+1}\binom{k}{m} \tag{21}$$

Ponemos:

$$B_{k,M} = \sum_{m=1}^{m=k\wedge M}(-1)^{m+1}\binom{k}{m} \tag{22}$$

Es obvio que $B_{k,M} = 1$ si $k \le M$. Si $k > M$, tenemos dos casos:

1) $k \ge 2M$.

Notar que $\binom{k}{m}$ crece con m para $1 \le m \le k/2$. De aquí se concluye que

$B_{k,M} \geq k$ si M es impar

$B_{k,M} \leq -k/2$ si M es par.

En efecto, si <u>M es impar</u> $\Rightarrow$ $B_{k,M} \geq \binom{k}{M} \geq k$

y si <u>M es par</u> $\Rightarrow$ $B_{k,M} \leq \binom{k}{1} - \binom{k}{2} = k\,\dfrac{3-k}{2} \leq -\dfrac{k}{2}$ ya que $k \geq 2M \geq 4$.

2) $M < k < 2M$. Es obvio que

$$-1 + B_{k,M} + \sum_{m=M+1}^{k} (-1)^{m+1}\binom{k}{m} = -(1-1)^k = 0 \quad \Rightarrow$$

$$B_{k,M} = 1 + (-1)^{k+1} \sum_{h=0}^{k-M-1} (-1)^{h+1}\binom{k}{h} = 1 + (-1)^{k+1}\,(B_{k,k-M-1} - 1)$$

(Cambiar $m \rightarrow k - h$ para la primera igualdad y tener en cuenta que $0 \leq k - M - 1 < k$ y la convención $B_{k,0} = 0$).

Observemos que $2\,(k - M - 1) < k$. Por lo tanto, si $k - M - 1 > 0$, podemos aplicar el caso anterior y resulta que :

$k - M - 1$ impar $\Rightarrow$ $B_{k,k-M-1} \geq k$

$k - M - 1$ par $\Rightarrow$ $B_{k,k-M-1} \leq -k/2$.

Haciendo un recuento elemental, se obtiene:

$B_{k,M} > 1$ si M es impar
$B_{k,M} < 0$ si M es par.

Finalmente, si $k = M + 1$, si M es impar es $B_{k,M} = 2$ y si M es par $B_{k,M} = 0$.

En resumen, si $k > M$ se cumple que

$B_{k,M} > 1$ si M es impar
$B_{k,M} \leq 0$ si M es par.

En consecuencia, dado que (21) se reescribe como

$$S_M = \sum_{k=1}^{M} p_k + \sum_{k=M+1}^{\infty} B_{k,M}\, p_k$$

resultan las desigualdades (19).

NOTA. Un subproducto del **LEMA 2.2.** es que el error en el cálculo de $P(\xi \geq 1)$ cuando en lugar de la suma de la serie (20) se emplea su M-suma está acotada por $\nu_{M+1}/(M+1)!$.

LEMA 2.3. Con las mismas notaçiones que en **LEMA 2.2.**, tenemos :

$$E\{V_m^{\xi}\} = m \sum_{k=m}^{\infty} V_{m-1}^{k-1}\, P(\xi \geq k) \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

Demostración. Si **j** , **m** son enteros no negativos, se verifica (ejercicio):

$$V_m^{j} = m \sum_{k=m-1}^{j-1} V_{m-1}^{k}$$

En consecuencia:

$$E\{V_m^{\xi}\} = \sum_{j=m}^{\infty} V_m^j P(\xi = j) = \sum_{j=m}^{\infty} P(\xi = j)\, m \sum_{k=m}^{j} V_{m-1}^{k-1} =$$

$$= m \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} V_{m-1}^{k-1} P(\xi = j) = m \sum_{k=m}^{\infty} V_{m-1}^{k-1} P(\xi \geq k)$$

LEMA 2.4. Supongamos que el proceso X tiene trayectorias de clase C^∞ y que $p_{X_{1/2}}(x) \leq D$ para x en un entorno de u.

Entonces, para cualquier sucesión $\{ c_k \}_{k=1,2,\ldots}$ de números positivos se tiene, para $m = 1, 2, \ldots$

$$E\{V_m^{U_u}\} \leq m \sum_{k=m}^{\infty} V_{m-1}^{k-1} \left[P(\|X^{(2k-1)}\|_\infty \geq c_k) + \frac{D\, c_k}{2^{2k-1}(2k-1)!} \right] \qquad (23)$$

Demostración. En virtud del **LEMA 2.3.**, basta probar que $P(U_u \geq k)$ está acotada por la expresión entre corchetes.

$$P(U_u \geq k) \leq P(\|X^{(2k-1)}\|_\infty \geq c_k) + P(U_u \geq k, \|X^{(2k-1)}\|_\infty < c_k).$$

Es claro que $U_u \geq k \Rightarrow N_u \geq 2k - 1$. Aplicando el **LEMA 2.1.** a la función $X_0 - u$ y reemplazando k por $2k - 1$, resulta:

$$\{ U_u \geq k, \|X^{(2k-1)}\|_\infty < c_k \} \subset \{ |X_{1/2} - u| \leq \frac{c_k}{2^{2k-1}(2k-1)!} \}$$

El resto es obvio.

Demostración del TEOREMA 2.1.

Aplicamos el **LEMA 2.2.** a la variable aleatoria $\xi = U_u$. Usando el **LEMA 2.4.** y la hipótesis con la notación $\bar{v}_m = E\{V_m^{U_u}\}$ $(m = 1, 2, \ldots)$:

$$\frac{\bar{v}_m}{m} \leq \frac{m}{m!} \sum_{k=m}^{\infty} V_{m-1}^{k-1} \gamma^*_m 2^{-(k+1)} \leq \frac{1}{m!} \sum_{k=m}^{\infty} V_m^k \gamma^*_m 2^{-(k+1)} =$$

$$= \frac{\gamma^*_m}{m!} 2^{-(m+1)} \left[\left(\frac{1}{1-x} \right)^{(m)} \Bigg|_{x=1/2} \right] = \gamma^*_m .$$

Dado que $v_m = E\{V_m^{U_u} \mathbb{1}_{\{X_0 \leq u\}}\} \leq \bar{v}_m$, resulta (18) de que $\gamma^*_m \to 0$. Asimismo, (iii) se deduce de la nota posterior al **LEMA 2.2.** ■

Lo que sigue está destinado al lógico escepticismo que, a estas alturas, ha ganado al lector, acerca de la aplicabilidad del Teorema 2.1. En un sentido general, se exige poder elegir de manera adecuada la sucesión $\{ c_k \}$ $k=1,2 \ldots$ lo cual depende de la información previa disponible sobre el proceso X. Asimismo. todo el procedimiento tendrá interés práctico para el cálculo efectivo de $P(M > u)$ sólo si se puede estimar adecuadamente γ^*_m y si, además, es posible calcular los momentos factoriales v_m por medio de las fórmulas de Rice (o por algún otro procedimiento).

Nos limitamos, por el momento, a los procesos gaussianos estacionarios. (Ver la notación en la Conferencia Nº 1). Supongamos que la medida espectral posee momentos finitos de todos los órdenes; dado que μ es par, $\lambda_k = 0$ si k es impar.

No es difícil probar que, en esas condiciones, c. s. las trayectorias de X son de clase C^∞ (se trata de una propiedad clásica, debida a Kolmogorov, ver [6]). Por otra parte, es obvio que

$$p_{X_t}(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Suponemos además que:

a) $\lambda_{2k+2} \leq B^k \lambda_{2k}$ para algún $B > 0$ y $k = 0, 1, 2, \dots$

b) $\lambda_{2k} = \left(\frac{k\sqrt{2}}{e}\right)^{2k} o(1) \qquad (k \to \infty)$

c) μ no es puramente discreta.

La condición b) se verifica, por ejemplo, si al covariancia Γ es analítica en todo el plano (Ejercicio). a) evita oscilaciones bruscas de los momentos espectrales y c) es una condición suficiente para la no degeneración de las densidades

$$p_{X_{t_1},\dots,X_{t_k},\dot{X}_{t'_1},\dots,\dot{X}_{t'_h}}$$

cuando $(t_1, \dots, t_k) \notin D_k$; $(t'_1, \dots, t'_h) \notin D_h$ (cf. [6]), que implica la validez de las fórmulas de Rice.

Veamos que a), b) implican que las hipótesis del **TEOREMA 2.1.** se verifican. Tenemos:

$$P(\|X^{(2k-1)}\|_\infty \geq c_k) \leq P(|X_0^{(2k-1)}| \geq c_k) + 2P(U_{c_k}(X^{(2k-1)};I) \geq 1)$$

Observar que $\{X_t^{(2k-1)} : t \in \mathbb{R}\}$ es un nuevo proceso estocástico centrado, gaussiano, estacionario, cuya covarianza es la función $-\Gamma^{(4k-2)}(t)$. Entonces,

$$P(\|X^{(2k-1)}\|_\infty \geq c_k) \leq P(|Z| \geq \frac{c_k}{\sqrt{\lambda_{4k-2}}}) + 2E\{U_{c_k}(X^{(2k-1)};I)\}$$

donde Z es una variable aleatoria normal típica y el segundo término se calcula mediante la fórmula de Rice (4) con las precauciones de que en lugar de "crossings" son "upcrossings" y λ_0 no es 1 en este caso sino λ_{4k-2} .

Usando todavía la acotación habitual: $\int_a^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \leq \frac{1}{a} e^{-\frac{1}{2}a^2}$ $(a > 0)$, resulta:

$$P(\|X^{(2k-1)}\|_\infty \geq c_k) \leq \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\lambda_{4k-2}}}{c_k} + \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda_{4k}}{\lambda_{4k-2}}}\right] e^{-\frac{1}{2}\frac{c_k^2}{\lambda_{4k-2}}} \qquad (24)$$

Poniendo $c_k = (B_1 k \lambda_{4k-2})^{1/2}$, con B_1 suficientemente grande (basta elegir $B_1 \geq \sup\{2, 2+2\log B\}$, por ejemplo) se verifica que se cumple la condición (17), y por lo tanto, el teorema.

El mismo cálculo permite obtener cotas para γ^*_m , y por lo tanto, para el error en la aproximación de la serie en (18) mediante una suma parcial.

La utilización del **TEOREMA 2.1.** para llevar a cabo un cálculo numérico efectivo requiere el cálculo de ν_m. Mediante la aplicación de las fórmulas de Rice se trata de integrales múltiples de dimensión creciente en que aparecen funciones con singularidades, lo que plantea dificultades numéricas.

En el caso de los procesos gaussianos estacionarios, ν_1 está dado por la fórmula (4) y ν_2 es calculable mediante una fórmula cerrada en la que aparecen los momentos espectrales (Ver [6]).

Con la sola condición $\lambda_4 < \infty$, se prueba sin mayor dificultad que existe $\delta > 0$ tal que:

$$\nu_2 \leq (\text{cte})\, e^{-\frac{u^2(1+\delta)}{2}}$$

y la aplicación del **LEMA 2.2.** permite concluir que - φ es la densidad gaussiana típica - :

$$0 \leq \int_u^{+\infty} \varphi(x)\,dx + \sqrt{\frac{\lambda_2}{2\pi}}\ \varphi(u) - P(M>u) \leq (\text{cte})\, e^{-\frac{u^2(1+\delta)}{2}}$$

que es una buena aproximación para **P(M > u)** si **u** es grande. (cf. [13]); éstas son, por otra parte, las mejores aproximaciones que se obtienen para todo **u**.

Analicemos un poco más detalladamente la cuestión del cálculo numérico mediante la aplicación del **Teorema 2.1.**, en el caso de los procesos gaussianos, estacionarios, centrados con espectro no puramente atómico y tales que la medida espectral tiene soporte acotado. Supongamos que queremos calcular $P(M > u)$ con un error menor que δ, $\delta > 0$.

Si procedemos por simulación, discretizamos la trayectoria mediante la partición $t_j = j / n$ $(j = 0, 1, \dots, n)$ y ponemos $M^{(n)} = \sup_{0 \leq j \leq n} X_{t_j}$.

Es claro (desarrollar por la fórmula de Taylor en el punto donde ocurre el máximo) que:

$$0 \leq M - M^{(n)} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\|\ddot{X}\|_\infty$$

Por lo tanto,

$$0 \leq P(M>u) - P(M^{(n)}>u) = P(M>u, M^{(n)} \leq u) \leq P\left(u < M \leq u + \frac{1}{2n^2}\|\ddot{X}\|_\infty\right)$$

lo cual indica que (ver Conf. Nº 3 relativa a la densidad de la distribución de **M**), en un sentido general, se requiere en media $n = \delta^{-1/2}$ **(cte)** puntos para que el error cometido al reemplazar **P(M > u)** por $P(M^{(n)} > u)$ esté acotado por δ.

Para usar Monte-Carlo, se requiere, para la aproximación en media cuadrática a menos de δ de $P(M^{(n)} > u)$, simular **(cte.)** δ^{-2} n-uplas gaussianas $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ y la simulación de cada una de ellas implica **(cte) n log n** operaciones, si se recurre a los mejores algoritmos que conozco ([15]). En total, la complejidad media es de la forma **(cte)** $\delta^{-5/2} \log(1/\delta)$.

Si, en cambio, aplicamos el **TEOREMA 2.1.**, se cumplen las condiciones a), b) c). En efecto, si $\text{sop}(\mu) \subset [-\alpha, \alpha]$, entonces

$$\lambda_{2k+2} = \int_{-\alpha}^{\alpha} x^{2k+2}\mu(dx) \leq \alpha^2 \lambda_{2k}$$

y $\qquad \lambda_{2k} \leq \alpha^{2k} \qquad$ que cumple b).

Usando (24) y la definición de γ_k, resulta:

$$\gamma_k \le \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{\alpha^{2k-1}}{c_k} + \frac{1}{\pi} \alpha \right] e^{-\frac{1}{2}\frac{c_k^2}{\alpha^{4k-2}}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \frac{c_k}{2^{2k-1}(2k-1)!}$$

Poniendo $c_k = (2k \log k)^{1/2} \alpha^{2k-1}$, resulta que

$$\gamma^*_m = \sup_{k \ge m} (2^k \gamma_k) \le -k(\log k - 2\log\alpha + c_0) + \log(\alpha+1) + c_1 \qquad (25)$$

donde c_0 , c_1 son constantes absolutas.

De acuerdo a (ii) del Teorema, alcanza con calcular una suma parcial de a lo sumo **(cte) log (1 / δ)** para cometer un error menor que δ. Si cada término v_m es calculado por un procedimiento de tipo Monte-Carlo para el cálculo de integrales (caben opciones más eficientes), en cada término habrá que hacer **(cte). δ^{-2}** replicaciones y la complejidad es de la forma **(cte) δ^{-2} log 1/δ** , que es mejor que la anterior cuando $\delta \downarrow 0$.

Como de costumbre, el valor de las constantes puede afectar decisivamente el valor del resultado. La desigualdad (25) permite hacer intervenir el semiancho del espectro (α) en el cálculo *a priori* del número de sumandos. Nótese que <u>sólo α</u> interviene en (25) como dato originado en el proceso X.

Más importante es el hecho que la cota obtenida para la complejidad mediante aplicación del **TEOREMA 2.1.** puede ser mejorada mediante el procedimiento que sigue y, en efecto, en la práctica el número de cálculos que se requiere realizar llega a ser mucho menor. Supongamos que cada momento factorial v_m es calculado, por algún procedimiento, con error menor que δ . Entonces, si detenemos el procedimiento una vez que

$$\frac{v_{m_0+1}}{(m_0+1)!} < \delta$$

en virtud del **LEMA 2.2.**, podemos asegurar que el error cometido al calcular **P(M>u)** está mayorado por **(e+1) δ** , ya que si $\tilde{v}_m$ son lo valores calculados y v_m los verdaderos:

$$\left| \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{v_m}{m!} - \sum_{m=1}^{m_0} (-1)^{m+1} \frac{\tilde{v}_m}{m!} \right| \le \left| \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{v_m}{m!} - \sum_{m=1}^{m_0} (-1)^{m+1} \frac{v_m}{m!} \right| + \sum_{m=1}^{m_0} \frac{|v_m - \tilde{v}_m|}{m!} \le$$

$$\le \frac{v_{m_0+1}}{(m_0+1)!} + \delta \sum_{m=1}^{m_0} \frac{1}{m!} \le 2\delta + \delta(e-1) = \delta(e+1)$$

Dicho de otra forma, los resultados sucesivos en el cálculo de v_m pueden ser utilizados para determinar m_0 , que resultará menor que el cálculo *a priori* precedente.

El resto de esta conferencia está destinado a exponer el **TEOREMA 2.2.** que se refiere a una adaptación del método anterior al caso de procesos cuyas trayectorias no son de clase C^∞ , mediante la regularización de las mismas por convolución con el núcleo gaussiano (otros núcleos pueden ser utilizados análogamente). No nos extenderemos en los ejemplos, que requieren ingredientes que no estamos en condiciones de presentar aquí.

Sea $X = \{ X_t : t \in [0,1] \}$ un proceso estocástico con trayectorias contínuas. Definimos

$$X^\varepsilon(t) = (\phi_\varepsilon * X)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\varepsilon(t-s) X_s \, ds$$

donde **X .** ha sido prolongada con el valor X_0 (resp. X_1) a la izquierda (resp. a la derecha) del intervalo [0,1] y

$$\phi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{\varepsilon^2}} \qquad (\varepsilon > 0 ; t \in \mathbb{R}).$$

Denotaremos M^ε , ν_m^ε , ... los análogos a **M**, ν_m , ... para el proceso $X^\varepsilon = \{ X^\varepsilon(t) : t \in [0, 1]\}$.

TEOREMA 2.2. Sean X y X^ε los procesos anteriores. Suponemos que se cumplen las siguientes hipótesis:

a) $p_{X^\varepsilon(t)}(x)$ está acotada por una constante $\mathbf{D_1}$ para $t \in [0,1]$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ suficientemente pequeño y $\mathbf{x}$ en un entorno de $\mathbf{u}$.

b) $E\{ \|X\|_\infty \} < \infty$

c) La distribución de probabilidad de **M** no tiene átomos.

Entonces:

$$\text{i) } P(M > u) = P(X_0 > u) + \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\nu_m^\varepsilon}{m!} \qquad (26)$$

ii) El error cometido cuando se reemplaza el $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}$ por un valor dado de $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ y la suma de la serie por su $\mathbf{m_0}$ -suma parcial está acotado, para todo $\boldsymbol{\eta} > 0$, por:

$$2[3 D_1 E\{ \|X\|_\infty \} \Phi^*_{m_0+1,\varepsilon}]^{1/2} + P(|X_0 - u| < \eta) + P(u < M \le u + \eta) +$$

$$+ P(\omega_X(\delta(\varepsilon)) \ge \frac{\eta}{2}) + P(\|X\|_\infty > \frac{\sqrt{2\pi}\,\eta}{8\varepsilon}), \qquad (27)$$

donde

$$\Phi^*_{m,\varepsilon} = 8\sqrt{2\pi} \sup_{k \ge m} \left(\frac{2}{\varepsilon^2}\right)^k \frac{1}{(k-1)!}$$

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon(-2 \log \varepsilon)^{1/2}.$$

NOTA. Los parámetros para que el error sea menor que un valor prefijado se determinan en el siguiente orden: 1º) Se halla $\boldsymbol{\eta} > 0$ para que el segundo y tercer término sean pequeños; 2º) Con ese valor de $\boldsymbol{\eta}$ se elige $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ suficientemente pequeño para que el cuarto y quinto términos sean pequeños; 3º) Con ese $\boldsymbol{\varepsilon}$, se elige $\mathbf{m_0}$ suficientemente grande para que el primer término sea pequeño.

Demostración. Consideramos los sucesos:

$$E_1 = \{ |X_0 - u| < \eta \}$$

$$E_2 = \{u < M \le u + \eta\}$$

$$E_3 = \{ \omega_X(\delta(\varepsilon)) \ge \eta/2 \}$$

$$E_4 = \left\{ \|X\|_\infty > \frac{\sqrt{2\pi}\,\eta}{8\varepsilon} \right\}$$

$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$$

Observar que $\omega \notin E \Rightarrow \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |X^\varepsilon(t) - X_t| < \eta$.

En efecto:

$$|X^{\varepsilon}(t) - X_t| \le \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\varepsilon}(t-s)\,|X_s - X_t|\,ds \le \omega_X(\delta(\varepsilon)) + 2\,\|X\|_{\infty} \int_{|t-s|>\delta(\varepsilon)} \Phi_{\varepsilon}(t-s)\,ds < \eta \qquad (28)$$

Usando (28):

$$P(M > u, X_0 \le u) \le P(M > u + \eta, X_0 \le u - \eta, E^c) + P(E) \le$$

$$\le P(M^{\varepsilon} > u, X^{\varepsilon}(0) < u) + P(E) \le P(U_u^{\varepsilon} \ge 1, X^{\varepsilon}(0) < u) + P(E)$$

Además:

$$P(U_u^{\varepsilon} \ge 1, X^{\varepsilon}(0) \le u, E^c) \le P(U_u^{\varepsilon} \ge 1, X^{\varepsilon}(0) \le u, X_0 \le u - \eta, E^c) \le$$

$$\le P(M > u, X_0 \le u - \eta) \le P(M > u, X_0 \le u).$$

En consecuencia:

$$P(X_0 > u) + P(U_u^{\varepsilon} \ge 1, X^{\varepsilon}(0) \le u) - P(E) \le P(M > u) \le$$

$$\le P(X_0 > u) + P(U_u^{\varepsilon} \ge 1, X^{\varepsilon}(0) \le u) + P(E)$$

Para calcular $P(U_u^{\varepsilon} \ge 1, X^{\varepsilon}(0) \le u)$ aplicamos, igual que en el **TEOREMA 2.1.** los **LEMAS 2.2.** y **2.4.** Se verifica -mediante un cierto cálculo que omitimos aquí - que el proceso X^{ε} cumple las hipótesis de dicho teorema con una elección apropiada de $\{ c_k \}$ y que el error debido a truncar la serie en $\mathbf{m_0}$ está acotado por el primer término de (27).

NOTAS SOBRE EL TEOREMA 2.2.

A) El teorema se aplica a los procesos gaussianos con trayectorias contínuas. Pongamos:

$$m(t) = E\{X_t\}, \ \sigma^2(t) = \mathrm{Var}\{X_t\}$$

para la media y la varianza de $\mathbf{X_t}$ (que son funciones contínuas de t). La condición **a)** resulta de suponer solamente $\sigma^2(t) > 0 \ \ \forall \ t \in [0, 1]$.

b) Es conocida de resultados clásicos ya citados sobre procesos gaussianos ([8]). Más aún, existe una extensa serie de resultados que permiten dar cotas - *a priori* - para $\mathbf{P}(\ \|X\|_{\infty} \ge x\ )$ (ver [8], [9], y referencias allí citadas. Estas cotas permiten mayorar $\mathbf{P(E_4)}$ a partir de información adicional sobre el proceso.

c) Es el teorema de Ylvisaker ([18]). Más aún, cotas *a priori* para $\mathbf{P(E_2)}$ resultan de cotas conocidas para la densidad de la distribución de **M** (ver, por ejemplo, además de [18], [17], [7], [16], y referencias allí contenidas).

Desigualdades para mayorar $\mathbf{P(E_3)}$ se obtienen por los medios clásicos para estudiar el módulo de continuidad de las trayectorias.

En resumen, información adicional sobre el proceso permite partir de cotas manejables de **P(E)** en función de ε y η, y elegir estos parámetros así como $\mathbf{m_0}$, para asegurar que el error cometido al reemplazar $\lim_{\varepsilon \downarrow 0}$ por un valor de ε y truncar la serie, está acotado por $\delta > 0$ prefijado.

Un tema adicional es la aplicabilidad de las fórmulas de Rice para el cálculo de ν_m (al cual hemos hecho referencia en la Conferencia N°1 para el caso gaussiano) y al costo computacional respectivo.

Como es natural a menor ε mayor $\mathbf{m_0}$ (cf. $\Phi^{*}_{m,\varepsilon}$).

(B) Es posible proceder mediante aproximaciones poligonales en lugar de convoluciones, con la ventaja de que entonces el número de términos no nulos de cada serie es finito. No trataremos este tema aquí.

(C) Los mismos métodos de los **TEOREMAS 1 Y 2** pueden ser utilizados para el cálculo de la distribución de la variable aleatoria $M^* = \sup_{t \in [0,1]} |X_t|$ en lugar de **M**, con algunas modificaciones menores.

(D) El **TEOREMA 2** puede aplicarse a difusiones unidimensionales, aunque en este caso no se cuenta con ejemplos en los que sea posible el cálculo efectivo de v_m^ε, dado que las densidades que aparecen no son conocidas.

CONFERENCIA Nº 3.

A continuación habremos de ocuparnos de la densidad de la distribución de **M**, en el caso en que $\mathcal{X}$ es un proceso gaussiano. Como se ha indicado anteriormente existe un numeroso conjunto de trabajos sobre el tema ([7]), [16] y referencias allí citadas).

El método que expondremos es sencillo y general y, combinándolo con el tipo de desigualdades que vimos en la Conferencia Nº 2 para la distribución del máximo, permite hallar cotas superiores e inferiores para la densidad que mejoran y simplifican las conocidas.

Comenzamos por algunos preliminares de notación.

Sea ξ una variable aleatoria a valores en $\mathbb{R}^k$ cuya distribución posee una densidad y **E** un suceso. Es claro que la medida (de masa menor o igual a 1)

$$\mu_\xi(B;E) = P(\{\xi \in B\} \cap E)$$

definida sobre los borelianos de $\mathbb{R}^k$ es absolutamente contínua con respecto a la medida de Lebesgue. Llamaremos " **densidad de ξ sobre E**" a la derivada de Radon de μ_ξ con respecto a la medida de Lebesgue:

$$p_\xi(x;E) = \frac{d\mu_\xi(x;E)}{dx}$$

Es claro que, en casi todo **x**, $p_\xi(x;E) \leq p_\xi(x)$.

El siguiente lema tiene un interés independiente.

LEMA 3.1. Sea $\mathcal{X} = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ un proceso gaussiano centrado con trayectorias de clase $\mathbf{C}^5$ y tal que no degeneran las distribuciones conjuntas del proceso y sus derivadas en cada punto.

Entonces, existe una constante **k > 0** - dependiente del proceso- tal que

$$p_{X_s,X_t,\dot{X}_s,\dot{X}_t}(x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2) \leq \frac{k}{(t-s)^4} \qquad \text{para todo } x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2 \in \mathbb{R}\ ;\ \text{todo } s \in [0,1]$$

$$\text{y } |t-s| \text{ suficientemente pequeño.} \qquad (29)$$

Demostración. Basta probar la desigualdad para $x_1 = x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$. Para simplificar ponemos $\tau = t - s$ y

$$E_s'(\xi) = E\{\xi / X_s = \dot{X}_s = 0\}$$

Es claro que:

$$p_{X_s,X_t,\dot{X}_s,\dot{X}_t}(0,0,0,0) = \frac{1}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{(\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)^{1/2}}\; p_{X_s,\dot{X}_s}(0,0) \qquad (30)$$

donde $\sigma_1^2 = E_s'\{X_t^2\}$; $\sigma_2^2 = E_s'\{\dot{X}_t^2\}$; $\sigma_{1,2} = E_s'\{X_t\dot{X}_t\}$

Escribimos los desarrollos de Taylor-Lagrange, para s, t $\in$ [0,1]:

$$X_t = X_s + \dot{X}_s\tau + \frac{1}{2!}\ddot{X}_s\tau^2 + \frac{1}{3!}\dddot{X}_s\tau^3 + \frac{1}{4!}X_s^{(4)}\tau^4 + \frac{1}{5!}X_\alpha^{(5)}\tau^5$$

$$\dot{X}_t = \dot{X}_s + \ddot{X}_s\tau + \frac{1}{2!}\dddot{X}_s\tau^2 + \frac{1}{3!}X_s^{(4)}\tau^3 + \frac{1}{4!}X_\beta^{(5)}\tau^4$$

con α y β comprendidos entre s y t.

Por lo tanto:

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{4}\tau^4 E_s'\{\ddot{X}_s^2\} + \frac{\tau^5}{6} E_s'\{\ddot{X}_s \dddot{X}_s\} + \tau^6\left[\frac{1}{36} E_s'\{\dddot{X}_s^2\} + \frac{1}{24} E_s'\{\ddot{X}_s X_s^{(4)}\}\right] + O(\tau^7)$$

$$\sigma_2^2 = \tau^2 E_s'\{\ddot{X}_s^2\} + \tau^3 E_s'\{\ddot{X}_s \dddot{X}_s\} + \tau^4\left[\frac{1}{4} E_s'\{\dddot{X}_s^2\} + \frac{1}{3} E_s'\{\ddot{X}_s X_s^{(4)}\}\right] + O(\tau^5)$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2}\tau^3 E_s'\{\ddot{X}_s^2\} + \tau^4 \frac{5}{12} E_s'\{\ddot{X}_s \dddot{X}_s\} + \frac{\tau^5}{24}\left[2 E_s'\{\dddot{X}_s^2\} + 3 E_s'\{\ddot{X}_s X_s^{(4)}\}\right] + O(\tau^6)$$

donde **$O(\tau^m)$ significa acotado por una constante (independiente de s, t), veces τ^m**. Aquí hemos usado que $E'\{\|X^{(j)}\|_\infty^k\} < \infty$ para todo **k** y todo **j = 1, ... , 5**. (Como anteriormente, $\|\cdot\|_\infty$ es la norma

del supremo en [0,1]).

Resulta:

$$\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2 = \frac{1}{144}\tau^8\left[E_s'\{\ddot{X}_s^2\} E_s'\{\dddot{X}_s^2\} - \left(E_s'\{\ddot{X}_s \dddot{X}_s\}\right)^2\right] + O(\tau^9)$$

El corchete no se anula para $s \in [0,1]$ y, por lo tanto, está minorado por una constante positiva, ya que es contínuo. En efecto, si se anula en $s = s_0$ proyectando ortogonalmente $\ddot{X}_{s_0}$ y $\dddot{X}_{s_0}$ sobre el subespacio engendrado por X_{s_0} y $\dot{X}_{s_0}$ en L^2, se ve que existe una combinación lineal de $X_{s_0}, \dot{X}_{s_0}, \ddot{X}_{s_0}$ y $\dddot{X}_{s_0}$ que se anula. Lo cual está excluído por la hipótesis de no degeneración.

Por un argumento similar, $p_{X_s, \dot{X}_s}(0,0)$ está acotada para $s \in [0, 1]$.

Reemplazando en (30), resulta

$$p_{X_s, X_t, \dot{X}_s, \dot{X}_t}(0,0,0,0) \leq \frac{\text{cte}}{\tau^4} \qquad (31)$$

para todo s y τ suficientemente pequeño.

NOTA. Obsérvese que, en condiciones bastante generales, se cumple que $p_{X_s, X_t}(0,0) \leq \text{cte}\,|\tau|$ si $\tau = t - s$ es suficientemente pequeño.

Un problema interesante es el estudio de cómo es la singularidad de $p_{X_{t_1},\ldots,X_{t_m},\dot{X}_{t_1},\ldots,\dot{X}_{t_m}}$ cuando **(t_1, ... , t_m)** está cerca de la diagonal $\mathbf{D}_m$.

Nótese además que en (31) no sólo hay una desigualdad sino una equivalencia cuando $\tau \to 0$.

TEOREMA 3.1. ([3]) Sea X un proceso gaussiano, centrado, con trayectorias de clase C^2. Entonces la distribución de **M** tiene una densidad p_M que satisface la igualdad siguiente:

$$p_M(u) = P_{X_0}(u^-; M \leq u) + P_{X_1}(u^-; M \leq u) + \int_0^1 dt \int_{-\infty}^0 |\ddot{x}|\, p_{X_t, \dot{X}_t, \ddot{X}_t}(u^-, 0, \ddot{x}; M \leq u)\, d\ddot{x}. \qquad (32)$$

Demostración.

PASO 1. Veamos primero que la distribución de **M** es absolutamente continua. Si $u \in \mathbb{R}$ y $h > 0$:

$$P(M \leq u) - P(M \leq u - h) \leq P(u - h < X_0 \leq u) + P(u - h < X_1 \leq u) + P(M^-_{u-h,u} \geq 1)$$

(hemos puesto $M^{-}_{u-h,u} = D_0^{u-h,u}(\dot{X};[0,1]))$.

Por lo tanto:

$$P(M \le u) - P(M \le u-h) \le P(u-h < X_0 \le u) + P(u-h < X_1 \le u) + E\{M^{-}_{u-h,u}\} =$$

$$= \int_{u-h}^{u} [p_{X_0}(x) + p_{X_1}(x) + \int_0^1 dt \int_{-\infty}^{0} |\ddot{x}|\, p_{X_t,\dot{X}_t,\ddot{X}_t}(x,0,\ddot{x})\, d\ddot{x}]\, dx$$

Esto prueba la continuidad absoluta y además, que

$$p_M(u) \le p_{X_0}(u) + p_{X_1}(u) + \int_0^1 dt \int_{-\infty}^{0} |\ddot{x}|\, p_{X_t,\dot{X}_t,\ddot{X}_t}(u,0,\ddot{x})\, d\ddot{x} \qquad (33)$$

A pesar de la simplicidad de la demostración, (33) da una acotación que coincide con las más finas que existen en la literatura, bajo condiciones especiales.

PASO 2. A continuación, hasta el último paso, suponemos que las trayectorias son de clase C^{∞} (C^5 sería suficiente).

Procedamos más precisamente que en el **PASO 1**.

La igualdad de sucesos siguiente es inmediata:

$$\{u-h < M \le u\} = \{u-h < X_0 \le u, M \le u\} \cup \{u-h < X_1 \le u, M \le u\} \cup$$
$$\cup \{X_0 \le u-h, X_1 \le u-h, u-h < M \le u\}$$

de donde:

$$P(M \le u) - P(M \le u-h) = P(u-h < X_0 \le u, M \le u) + P(u-h < X_1 \le u, M \le u) +$$
$$+ P(M^{-}_{u-h,u} = 1, M \le u) + R(h) \qquad (34)$$

donde:

$$|R(h)| \le P(u-h < X_0 \le u, u-h < X_1 \le u) + P(M^{-}_{u-h,u} \ge 2) +$$
$$+ P(u-h < X_0 \le u, M^{-}_{u-h,u} \ge 1) + P(u-h < X_1 \le u, M^{-}_{u-h,u} \ge 1) =$$
$$= R_1(h) + R_2(h) + R_3(h) + R_4(h)$$

-Es claro que $\mathbf{R_1(h) = O(h^2)}$ $\mathbf{(h \downarrow 0)}$

-Veamos a continuación $\mathbf{R_2(h)}$.

Primero, observar que si ξ es a valores enteros no negativos: $\mathbb{I}_{\{\xi \ge 2\}} \le \frac{1}{2}\, \xi\, (\xi - 1)$.

Por lo tanto,

$$R_2(h) \le \frac{1}{2} E\{M^{-}_{u-h,u}(M^{-}_{u-h,u} - 1)\, \mathbb{I}_{\{\|X^{(4)}\|_\infty \le h^{-1/4}\}}\} + P(\|X^{(4)}\|_\infty > h^{-1/4}) \qquad (35)$$

El segundo término a la derecha en (35) está acotado por $c_1 e^{-c_2 h^{-1/2}}$, c_1, c_2 constantes positivas, en virtud del teorema de Fernique sobre la cola de la distribución del supremo de procesos gaussianos ([9]).

Nuestro problema es acotar el primer término, que en virtud de la fórmula de Rice se escribe:

$$\frac{1}{2}\int_0^1\!\!\int ds\,dt \int_{u-h}^{u}\!\!\int E\{\ddot{X}_s^-\,\ddot{X}_t^-\,\mathbb{1}_{\{\|X^{(4)}\|_\infty \le h^{-1/4}\}} / X_s = x_1, X_t = x_2, \dot{X}_s = \dot{X}_t = 0\} \times \qquad (36)$$

$$\times\ p_{X_s, X_t, \dot{X}_s, \dot{X}_t}(x_1, x_2, 0, 0)\, dx_1\, dx_2$$

Haremos uso de la siguiente fórmula de Taylor: si la función $X_{(.)}$ verifica $(s \neq t)$ $X_s = x_1, X_t = x_2, \dot{X}_s = \dot{X}_t = 0$ y es de clase $C^{(4)}$, entonces existe un (único) polinomio P de grado 3 que verifica estas mismas condiciones y tal que

$$X_y = P(y) + \frac{1}{4!}(y-s)^2(y-t)^2 X_\alpha^{(4)} \qquad (37)$$

con α comprendido entre s y t.

El polinomio P se calcula fácilmente: $P(y) = x_1 + \dfrac{x_2 - x_1}{(t-s)^3}(y-s)^2(-2y+3t-s)$

y

$$\left.\begin{aligned} \ddot{P}(t) &= \frac{6(x_2 - x_1)}{(t-s)^2} \\ \ddot{P}(s) &= -\frac{6(x_2 - x_1)}{(t-s)^2} \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

Por otra parte, si reescribimos (37) como $X_y = P(y) + G(y)$, es claro que $G \in C^4$ y podemos escribir:

$$G(y) = G(s) + (y-s)G'(s) + \frac{1}{2!}(y-s)^2 G''(s) + \frac{1}{3!}(y-s)^3 G'''(\beta) =$$

$$= \frac{1}{2!}(y-s)^2 G''(s) + \frac{1}{3!}(y-s)^3 G'''(\beta)$$

β entre s e y.

Se sigue que para $y \neq s$:

$$\frac{1}{2!}(y-s)^2 G''(s) + \frac{1}{3!}(y-s)^3 G'''(\beta) = \frac{1}{4!}(y-s)^2(y-t)^2 X_\alpha^{(4)}$$

$$\Rightarrow \qquad |G''(s)| \le [\, |y-s|\, |G'''(\beta)| + (y-t)^2 \|X^{(4)}\|_\infty]$$

Haciendo $y \to s$, resulta $|G''(s)| \le (s-t)^2 \|X^{(4)}\|_\infty$

Del mismo modo, $|G''(t)| \le (s-t)^2 \|X^{(4)}\|_\infty$ y podemos escribir

$$\begin{aligned} \ddot{X}_s &= \ddot{P}(s) + (s-t)^2 G(s,t) \qquad \text{con } |G(s,t)|, |H(s,t)| \le \|X^{(4)}\|_\infty \\ \ddot{X}_t &= \ddot{P}(t) + (s-t)^2 H(s,t) \end{aligned} \qquad (39)$$

(38), (39) implican que

$$\left.\begin{aligned} \ddot{X}_s^- &\le \left[\frac{6(x_2 - x_1)}{(t-s)^2} - \|X^{(4)}\|_\infty (t-s)^2\right]^- \\ \ddot{X}_t^- &\le \left[-\frac{6(x_2 - x_1)}{(t-s)^2} - \|X^{(4)}\|_\infty (t-s)^2\right]^- \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

La expresión (36) resulta acotada por (teniendo en cuenta además el **LEMA 3.1.**):

$$(\text{cte}) \iint_0^1 \frac{ds\,dt}{(t-s)^4} \int\int_{u-h}^{u} E\left\{\left(\frac{6(x_2-x_1)}{(t-s)^2} - \|X^{(4)}\|_\infty (t-s)^2\right)^- \left(-\frac{6(x_2-x_1)}{(t-s)^2} - \|X^{(4)}\|_\infty (t-s)^2\right)^- \times\right.$$
$$\left. \times\, \mathbb{I}_{\{\|X^{(4)}\|_\infty \le h^{-1/4}\}} / X_s = x_1, X_t = x_2, \dot{X}_s = \dot{X}_t = 0\right\} dx_1\, dx_2 \qquad (41)$$

Observemos todavía que si $|x_2 - x_1| > \frac{h^{-1/4}}{6}(t-s)^4$, entonces el integrando vale cero.

En conclusión, se obtiene la cota

$$(\text{cte}) \iint_0^1 \frac{ds\,dt}{(t-s)^4} \int_{u-h}^{u} dx_1 \int_{x_1}^{x_1 + h \wedge \frac{h^{-1/4}(t-s)^4}{6}} 4h^{-1/2}(t-s)^4\, dx_2 \le (\text{cte})\, h^{3/2}$$

Reemplazando en (35):

$$R_2(h) \le (\text{cte}) h^{3/2} + (\text{cte}) e^{-(\text{cte}) h^{-1/2}} = o(h) \qquad (h \downarrow 0)$$

- $R_3(h)$ y $R_4(h)$ son análogos.

$$R_3(h) \le \int_{u-h}^{u} dx_0 \int_{u-h}^{u} dx \int_0^1 dt \int_{-\infty}^{0} |\ddot{x}|\, p_{X_0, X_t, \dot{X}_t, \ddot{X}_t}(x_0, x, 0, \ddot{x})\, d\ddot{x}$$

Separamos la integral entre 0 y 1 en dos: entre 0 y δ , y entre δ y 1.

En la segunda integral se ha evitado la degeneración de la distribución gaussiana que aparece, y resulta por lo tanto **O (h^2)**.

La primera integral se acota por

$$\int_{u-h}^{u} dx \int_0^{\delta} dt \int_{-\infty}^{0} |\ddot{x}|\, d\ddot{x} \int_{-\infty}^{\infty} p_{X_0, X_t, \dot{X}_t, \ddot{X}_t}(x_0, x, 0, \ddot{x})\, dx_0 =$$

$$= \int_0^{\delta} dt \int_{u-h}^{u} dx \int_{-\infty}^{0} |\ddot{x}|\, p_{X_t, \dot{X}_t, \ddot{X}_t}(x, 0, \ddot{x})\, d\ddot{x} = \int_0^{\delta} dt \int_{u-h}^{u} dx\, E\{\ddot{X}_t^- / X_t = x, \dot{X}_t = 0\} p_{X_t, \dot{X}_t}(x, 0)$$

Como tanto la esperanza condicional como la densidad que figuran en el integrando están acotadas, esta integral resulta mayorada por **(cte) δ h** .

En resumen, como $\delta > 0$ es arbitrario, se obtiene $R_3(h) = o(h)$.

PASO 3. Observemos todavía que el tercer término en el segundo miembro de (34) puede reemplazarse por

$$E\{M^{-}_{u-h,u}\,\mathbb{I}_{\{M\le u\}}\}$$

con un error **o(h)**.

En efecto, si ξ es a valores enteros no negativos:

$$\xi - \xi(\xi-1) \le \mathbb{I}_{\{\xi=1\}} \le \xi \qquad \Longrightarrow$$

$$|E(\xi) - P(\xi=1)| \le E\{\xi(\xi-1)\}$$

Aplicando esto a la variable aleatoria $\xi_h = M^{-}_{u-h,u}\,\mathbb{I}_{\{M\le u,\ \|X^{(4)}\|_\infty \le h^{-1/4}\}}$ y usando los resultados del **PASO 2**, se tiene:

$$|E(\xi_h) - P(\xi_h = 1)| = o(h) \qquad (42)$$

Por otro lado,

$$|E\{M^{-}_{u-h,u}\,\mathbb{I}_{\{M\le u\}}\} - E(\xi_h)| \le E\{M^{-}_{u-h,u}\,\mathbb{I}_{\{\|X^{(4)}\|_\infty > h^{-1/4}\}}\} \le$$

$$\le \left(E\{(M_{u-h,u})^2\}\right)^{1/2}\left(P(\|X^{(4)}\|_\infty > h^{-1/4})\right)^{1/2} = o(h) \qquad (43)$$

$$|P(M^{-}_{u-h,u} = 1, M \le u) - P(\xi_h = 1)| \le P(\|X^{(4)}\|_\infty > h^{-1/4}) = o(h) \qquad (44)$$

(42), (43), (44) implican lo anunciado.

PASO 4. Podemos ahora reescribir (34) en la forma:

$$P(M\le u) - P(M \le u-h) = P(u-h < X_0 \le u, M\le u) + P(u-h < X_1 \le u, M \le u) +$$

$$+ \int_{u-h}^{u} dx \int_0^1 dt \int_{-\infty}^{0} |\ddot{x}|\, p_{X_t,\dot{X}_t,\ddot{X}_t}(x,0,\ddot{x}; M\le u)\,d\ddot{x} + o(h)$$

$$P(M\le u) - P(M\le u-h) = \int_{u-h}^{u} [p_{X_0}(x; M\le u) + p_{X_1}(x; M\le u) +$$

$$+ \int_0^1 dt \int_{-\infty}^{0} |\ddot{x}|\, p_{X_t,\dot{X}_t,\ddot{X}_t}(x,0,\ddot{x}; M\le u)\,d\ddot{x}]\,dx + o(h) = \int_{u-h}^{u} H(x,u)\,dx + o(h) \qquad (45)$$

El teorema resultará demostrado (a menos de la restricción que agregamos en cuanto a la regularidad de las trayectorias) si probamos que la función

$$x \to H(x\,,\,u)$$

tiene límite cuando $x \uparrow u$, para cada **u**, que llamaremos $H(u^-, u)$, y que esta función de **u** es continua.

Consideremos el primer término en **H(x , u)** (el segundo es análogo).

$$p_{X_0}(x; M\le u) = P(M\le u / X_0 = x)\, p_{X_0}(x)$$

es inmediata. Veamos primero que $\lim_{x\uparrow u} P(M \le u / X_0 = x)$ existe.

Usamos la descomposición ortogonal:

$$X_t = X_t - \alpha(t)X_0 + \alpha(t)X_0 = Y_t + \alpha(t)X_0 \,, \qquad \alpha(t) = \frac{E\{X_0 X_t\}}{E\{X_0^2\}}$$

Dado que la distribución de **M** no tiene átomos, es lo mismo probar el resultado para $P(M < u \,/\, X_0 = x)$.

$$P(M < u \,/\, X_0 = x) = P(\, Y_t < u - \alpha(t)\,x \quad \forall\; t \in [0\,,1])\,.$$

Supongamos $x_n \uparrow u$, $x_n \neq u$ y denotemos:

$$A_n = \{Y_t < u - \alpha(t)x_n \,, \quad \forall t \in [0,1]\} = A_n^+ \cap A_n^-$$

donde

$$A_n^+ = \{Y_t < u - \alpha(t)x_n \,, \quad \forall t \in J^+\} \,, \qquad J^+ = \{t : \alpha(t) > 0\}$$

$$A_n^- = \{Y_t < u - \alpha(t)x_n \,, \quad \forall t \in J^-\} \,, \qquad J^- = \{t : \alpha(t) \leq 0\}$$

Nótese que J^+ es abierto y J^- compacto (todo ocurre en el intervalo $[0,1]$).

Se tiene:

$$A_n^+ \downarrow A_\infty^+ = \{Y_t \leq u - \alpha(t)u \quad \forall t \in J^+\}$$

$$A_n^- \uparrow A_\infty^- = \{Y_t < u - \alpha(t)u \quad \forall t \in J^-\}$$

La segunda convergencia se deriva de que J^- es compacto, de modo que si $Y_t < u - \alpha(t)u \quad \forall t \in J^-$ existe **n** suficientemente grande tal que $Y_t < u - \alpha(t)x_n \quad \forall t \in J^-$.

Además,

$$|P(A_n^+ \cap A_n^-) - P(A_\infty^+ \cap A_\infty^-)| \leq P(A_n^+ \setminus A_\infty^+) + P(A_\infty^- \setminus A_n^-) \to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty$$

Esto prueba

$$P(M < u/X_0 = x) \underset{x \uparrow u}{\to} P(A_\infty^+ \cap A_\infty^-)) = H_1(u) = P(Y_t \leq u - \alpha(t)u \quad \forall t \in J^+, Y_t < u - \alpha(t)u \quad \forall t \in J^-)$$

En cuanto al tercer término de $\mathbf{H(x,u)}$, se procede en forma análoga para demostrar la existencia del límite

$$\lim_{x \uparrow u} P(M \leq u / X_t = x, \dot{X}_t = 0, \ddot{X}_t = \ddot{x})$$

para t, $\ddot{x}$ fijos. Para ello, proyectamos ortogonalmente X_s sobre la terna $(X_t, \dot{X}_t, \ddot{X}_t)$ y se sigue de manera análoga sin dificultad.

PASO 5. Si X tiene trayectorias de clase C^2, las regularizamos por convolución con un núcleo determinístico de clase C^∞ y soporte compacto, obteniendo un proceso con trayectorias regulares que cumple las hipótesis del TEOREMA **3.1.** y por lo tanto la fórmula (32). Haciendo tender la regularización a la identidad resulta (32) para el proceso de partida. ■

El TEOREMA **3.1.** puede utilizarse para dar cotas superiores e inferiores para $p_M(u)$. Como ya indicamos, una mayoración simple resulta de reemplazar $\{M \leq u\}$ por Ω en la fórmula (32), obteniendo (33).

Del mismo modo que en la Conferencia Nº 2, se puede utilizar el LEMA **2.2.** adaptado para obtener cotas en ambas direcciones. Claro que entonces habrán de requerirse hipótesis adicionales que aseguren la finitud de los momentos factoriales.

Los mismos métodos que en la Conferencia Nº 2 permiten también el cálculo numérico.

Supongamos que X es gaussiano, centrado y estacionario, con covarianza Γ, $\Gamma(0) = 1$. La mayoración simple es

$$p_M(u) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}u^2} + \int_0^1 dt\; E\{\ddot{X}_t^- / X_t = u, \dot{X}_t = 0\}\, p_{X_t,\dot{X}_t}(u,0) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}u^2} + E\{\ddot{X}_0^- / X_0 = u, \dot{X}_0 = 0\}\, p_{X_0,\dot{X}_0}(u,0)$$

ya que el integrando no depende de t.

La descomposición ortogonal de $\ddot{X}_0$ con respecto al subespacio engendrado por $X_0, \dot{X}_0$ es inmediata

$$\ddot{X}_0 = \ddot{X}_0 + \lambda_2 X_0 - \lambda_2 X_0 = Y_0 - \lambda_2 X_0$$

con $\quad \mathrm{Var}(Y_0) = \lambda_4 - \lambda_2^2,\ Y_0 \perp (X_0, \dot{X}_0)$.

Por lo tanto,

$$E\{\ddot{X}_0^- / X_0 = u, \dot{X}_0 = 0\} = E\{(Y_0 - \lambda_2 u)^-\} = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \lambda_2 u)^- \frac{1}{(2\pi(\lambda_4 - \lambda_2^2))^{1/2}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{(\lambda_4 - \lambda_2^2)}}\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{\lambda_2 u}{\sqrt{\lambda_4 - \lambda_2^2}}} (\lambda_2 u - \sqrt{\lambda_4 - \lambda_2^2}\, w)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}w^2}\, dw$$

Poniendo $\theta = \dfrac{\sqrt{\lambda_4 - \lambda_2^2}}{\lambda_2} > 0$ (ya que $\lambda_4 > \lambda_2^2$), resulta, reemplazando en la cota de $p_M(u)$:

$$p_M(u) \leq \varphi(u)\left[2 + \sqrt{\frac{\lambda_2}{2\pi}}\, u\, \phi\!\left(\frac{u}{\theta}\right) - \frac{\lambda_2^{3/2}}{\sqrt{2\pi}}\, \theta^2\, \varphi\!\left(\frac{u}{\theta}\right)\right]$$

(ϕ, φ denotan respectivamente la distribución y la densidad normal típica).

No habremos de proseguir aquí las diversas maneras de explotar la fórmula (32) para obtener cotas para $p_M(u)$.

Para terminar, dejamos como ejercicio la obtención de cotas superiores de $p_M(u)$ cuando reemplazamos $\{M \leq u\}$ por $\{X_\tau \leq u\}$ para un cierto $\tau \in [0, 1]$, bien elegido. Del mismo modo, utilizar los métodos de la Conferencia Nº 2.

REFERENCIAS.

[1] Adler, R. J. (1990) "*An Introduction to Continuity, Extrema and Related Topics for General Gaussian Processes*", IMS, Hayward, Ca.

[2] Azaïs, J-M; Wschebor, M. (1997) "Une formula pour calculer la distribution du maximum d'un processus stochastique", C. R. Acad. Sci. Paris, t324, Série I, 225-230.

[3] Azaïs, J-M; Wschebor, M. (1997). Preprint.

[4] Belyaiev, Yu. (1966). "On the number of intersections of a level by a gaussian stochastic processes" Th. Prob. Appl. 11, 106-113.

[5] Borell, C. (1975) "The Brum-Minkowski inequality in Gauss space", Invent. Math., 30, 207-216.

[6] Crámer, H.; Leadbetter, M. R. (1967) "*Stationary and Related Stochastic Processes*", J. Wiley.

[7] Cuzick, J. (1975): "Conditions for finite moments of the number of zero crossings for Gaussians processes", The Ann. Prob., 3(5), 849-858

[8] Diebolt, J.; Posse, C. (1996). "On the density of the maximum of a smooth gaussian processes", The Annals of Probability.

[9] Fernique, X. (1974). "Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes". Lecture Notes in Math., 480. Springer.

[10] Feller, W. (1966). "*An introduction to Probability theory and its applications*". Vol. 2. J.Wiley and Sons.

[11] Landau, H.J., Shepp, L.A. (1971). "On the supremum of Gaussian processes". Sankhya, Ser. A 32, 369-378

[12] Ledoux, M.; Talagrand, M. (1991). "*Probability in Banach Spaces*". Springer.

[13] Longuett-Higgins, M. S. (1966). "The Distribution of Intervals Between Zeros of a Stationary Random Function", Phil. Trans. Royal Soc. London, Ser. A, 254, 557-599.

[14] Marcus, M. (1977). "Level crossings of a stochastic process with absolutely continuous sample paths". The Ann. Prob., 5(1), 52-71.

[15] Miroshin, R.N. (1977)"Conditions for finiteness of moments of the number of zeros of stationary Gaussian processes". Th. Prob.Appl., 22(3), 615-624.

[16] Miroshin, R. N. (1983). "The use of Rice series". Th. Prob. Appl., 28, 714-726.

[17] Miroshin, R.N. (1974). "Rice series in the Theory of Random Functions". Vestnik Leningrad Univ. Math., 1(2), 143-155.

[18] Nualart, D.; Wschebor, M. (1991). "Intégration par parties dans l'espace de Wiener et approximation du temps local". Prob. Th. Rel. Fields, 90, 83-109.

[19] Piterbarg, V. I. (1981). "Asymptotic methods in the theory of gaussian processes and fields". Th. Prob. Appl., 26, 687-705.

[20] Piterbarg, V.I. (1981). "Comparison of Distribution Functions of Maxima of Gaussian Processes". Th.Prob.Appl., 26(4), 702-719.

[21] Rice, S. O. (1944-1945). "Mathematical Analysis of Random Noise", Bell Sys. Tech. J., 23, 282-332, 24, 45-156.

[22] Ripley, B. D. (1987). "*Stochastic simulation*". J. Wiley.

[23] Weber, M. (1985). "Sur la densité du maximum d'un processus gaussien". J. Math, Kyoto Univ. 25, 515-521.

[24] Wschebor, M. (1985). "Surfaces aléatories. Mesure géométrique des ensembles de niveau". Lecture Notes in Math. 1147. Springer.

[25] Ylvisaker, D. (1968). "A note on the Absence of Tangencies in Gaussian Sample Paths". The Ann. of Math. Stat., 39, 261-262.