Elementos booleanos y representación de reticulados residuales

Diana M. Brignole - Rosana V. Entizne

Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina.

Resumen

Se representa un reticulado residual divisible lineal en la forma: $[0; \mathrm{i}] \times [0; \neg \mathrm{i}]$, siendo i la negación de un idempotente, y $\neg \mathrm{i} = \mathrm{i} \to 0$.
Se caracteriza a los elementos negaciones de idempotentes como los booleanos del reticulado, de donde resulta que la existencia de una tal representación es equivalente a la existencia de un elemento booleano distinto de 0 y 1.
En particular, en el caso finito, se caracteriza a los descomponibles como aquellos con más de un átomo.

1 Introducción

Se presenta un cierto tipo de reticulados residuales como producto de reticulados residuales más sencillos, generalizando un trabajo de Höhle [5] relativo a MV álgebras.[1]
Los reticulados residuales constituyen una estructura algebraica asociada a la lógica fuzzy y admiten como casos particulares a las estructuras ligadas a las lógicas bi y multivalentes.[9]
Un reticulado residual es un reticulado $(\mathcal{L}, \leq, \otimes)$ munido de otras dos operaciones binarias: $\otimes$ (asociativa, conmutativa, isótona) y $\to$ tales que $(\otimes, \to)$ constituyen un par adjunto.
Se demuestra que un reticulado residual divisible lineal puede representarse como un producto:

$$[0, i] \times [0, \neg i]$$

con las operaciones definidas convenientemente y donde i es la negación de un idempotente con respecto a la operación $\otimes$ y $\neg i = i \to 0$.
Se define en forma natural a los elementos booleanos de un reticulado residual y se prueba que en los reticulados residuales que hemos considerado los elementos que son negación de idempotentes son, justamente, los booleanos.
De aquí resulta que la existencia de una representación (no trivial) como la propuesta, es

[1] En este trabajo consideraremos a una MV álgebra como un reticulado residual divisible en el que la negación es involutiva, es decir un reticulado divisible de Girard.

equivalente a la existencia de al menos un elemento booleano, distinto de 0 y 1.
En particular se obtiene que todo reticulado residual divisible lineal, finito, con más de un átomo, es descomponible.

2 Nociones preliminares

2.1 Reticulados residuales integrales

Sea $(\mathcal{L}, \leq)$ un reticulado con primer y último elemento. Es decir, $\mathcal{L}$ es un conjunto no vacío, parcialmente ordenado por $\leq$, tal que existen el ínfimo y el supremo de cualquier subconjunto finito. En particular $\inf \emptyset = 1$, y $\sup \emptyset = 0$, donde 0 y 1 son, respectivamente, el primer y el último elemento de $\mathcal{L}$.
Sea, además, $\otimes : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ una operación isótona tal que $(\mathcal{L}, \otimes, e)$ es un monoide ordenado, es decir:

m0) $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$

m1) $x \otimes e = x$

m2) $x \otimes y = y \otimes x$

m3) si $x \leq y$ entonces $x \otimes z \leq y \otimes z$ y $z \otimes x \leq z \otimes y$.

Entonces, *si existe* otra operación binaria $\to$ en $\mathcal{L}$ que satisface:

$$x \otimes y \leq z \quad sii \quad x \leq y \to z \tag{1}$$

se dice que $(\mathcal{L}, \leq, \otimes)$ es un *reticulado residual*. Si $e = 1, (\mathcal{L}, \leq, \otimes)$ se dice un *reticulado residual integral.* [2] El par $(\otimes, \to)$ satisfaciendo (1) se dice un *par adjunto* [3]

Lema 2.1.1 *Sea $(\mathcal{L}, \leq, \otimes)$ un reticulado residual integral, entonces se verifica:*[4]

i) $a \leq b$ *entonces* $b \to c \leq a \to c$

ii) $a \otimes (a \to b) \leq b$

iii) $a \otimes (b \vee c) = (a \otimes b) \vee (a \otimes c)$

iv) $(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$

[2] Birkhoff [1] llama a esta estructura un l-monoide, Pavelka [6] lo denomina reticulado residual y lo nota (L; ⊗; →)

[3] Pavelka [6], Turunen [9](La condición que liga al producto y el residuo determina una correspondencia de Galois) Birkhoff [1])

[4] La demostración de este lema, así como las demás omitidas en este trabajo, se encuentran en [2]

v) $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$

vi) $a \leq b \to a$

vii) $a \leq b$ *si y sólo si* $a \to b = 1$

viii) *si* $a \wedge b = 0$ *entonces* $a \to b = a \to 0$

2.2 Reticulado residual lineal

Un reticulado residual $(\mathcal{L}, \leq, \otimes)$ se dice *lineal* si para cada a, b en $\mathcal{L}$ se verifica:

$$(a \to b) \vee (b \to a) = 1$$

Lema 2.2.1 *Sea $(\mathcal{L}, \leq, \otimes)$ un reticulado residual integral. Son equivalentes:*

a) $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$

b) $a \to (b \vee c) = (a \to b) \vee (a \to c)$

c) $(a \wedge b) \to c = (a \to c) \vee (b \to c)$

Es claro que definiendo el operador 1-ario $\neg a = a \to 0$ en un reticulado residual integral lineal se satisfacen las leyes de De Morgan: [5]

$$\neg a \vee \neg b = \neg(a \wedge b)$$
$$\neg a \wedge \neg b = \neg(a \vee b)$$

Para que este reticulado sea además un álgebra de De Morgan debe verificarse $\neg\neg a = a$, es decir $(a \to 0) \to 0 = a$, propiedad que caracteriza a un *reticulado residual de Girard*. En general, en un reticulado integral se verifica $a \leq \neg\neg a$.

Lema 2.2.2 *Si $(\mathcal{L}, \leq, \otimes)$ un reticulado residual integral lineal, se verifica:*

i) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

ii) $(a \wedge b) \to (a \wedge c) = (a \wedge b) \to c$

[5] Algunos autores denominan a la propiedad $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$ *ley fuerte de De Morgan* [5]

2.3 Reticulado residual divisible

Un reticulado residual $(\mathcal{L}, \leq, \otimes)$ se dice un *reticulado residual divisible* si para cada par de elementos a, b, con $b \leq a$ existe c tal que $b = a \otimes c$. [6]

Observación 2.3.1 Es claro que todo reticulado residual divisible es necesariamente integral.

Lema 2.3.1 *Sea $(\mathcal{L}, \leq, \otimes)$ un reticulado residual.*

i) *Son equivalentes:*

   a) $(\mathcal{L}, \leq, \otimes)$ *es divisible*

   b) $a \wedge b = a \otimes (a \to b)$

   c) $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \otimes ((a \to b) \to c)$

ii) *Si $(\mathcal{L}, \leq, \otimes)$ es divisible y a idempotente*

   a) $a \wedge b = a \otimes b$

3 Representación de reticulados residuales divisibles lineales

3.1 Teorema de representación

Lema 3.1.1 *Sea $(\mathcal{L}, \leq, \otimes)$ un reticulado residual divisible lineal, y sea x un elemento idempotente en $\mathcal{L}$. Entonces, cualquiera que sea y en $\mathcal{L}$ se tiene:*

$$(x \to y) \vee ((x \to y) \to y) = 1$$

demostración
Por la linealidad podemos escribir:

$$(x \to y) \vee ((x \to y) \to y) = ((x \to y) \wedge x) \to y$$

Dado que x es idempotente, y en virtud del lema 2.3.1.ii-a), i-b), se obtiene la igualdad indicada. □

En particular, si $y = 0$ se tiene:

$$\neg x \vee \neg\neg x = 1 \qquad (2)$$

[6] A los b que satisfacen esta propiedad se los suele llamar *elementos principales* [4]

Lema 3.1.2 *Sea* $(\mathcal{L}, \leq, \otimes)$ *un reticulado residual divisible lineal, y sea* x *un elemento idempotente, entonces* $\neg x$ *también es idempotente*

demostración
Por el lema anterior

$$\neg x = \neg x \otimes (\neg x \vee \neg\neg x)$$

y aplicando los lemas 2.1.1.iii y 2.3.1.i.b) resulta lo que queríamos probar. □

Observación 3.1.1 Es claro que el conjunto de los elementos idempotentes en un reticulado residual integral es no vacío, ya que 0 y 1 son idempotentes.
Sea x_0 un elemento idempotente en $\mathcal{L}$, entonces, en virtud del lema 3.1.2, $i = x_0 \to 0$ es también un elemento idempotente.
Además, cualquiera que sea a en $\mathcal{L}$ satisface

$$a = (a \wedge i) \vee (a \wedge \neg i)$$

ya que $\mathcal{L}$ es reticulado distributivo y $i \vee \neg i = 1$

Lema 3.1.3 *Sea* $(\mathcal{L}, \leq, \otimes)$ *un reticulado residual divisible, lineal y sea i un elemento idempotente en* $\mathcal{L}$. *Entonces* $(a \to b) \wedge i = (a \wedge i) \to (b \wedge i)$.

demostración
Por el lema 2.2.2 escribimos

$$(a \wedge i) \to (b \wedge i) = (a \wedge i) \to b$$

y claramente se verifica

$$(a \to b) \wedge i \leq (a \wedge i) \to b$$

Para probar la otra desigualdad basta considerar

$$((a \to b) \otimes a) \wedge i \leq b$$

y aplicar el lema 2.3.1.ii-a) y la condición de par adjunto. □

Lema 3.1.4 *Sea* $(\mathcal{L}, \leq, \otimes)$ *un reticulado residual divisible lineal, i la negación de un elemento idempotente,* $[0, i] = \{\lambda \in \mathcal{L} : \lambda \leq i\}$. *Entonces* $[0, i]$ *con la estructura inducida por* $\mathcal{L}$ *es un reticulado residual divisible lineal.*

demostración

Si $i = 0$ ó $i = 1$ es trivial

Supongamos $0 \neq i \neq 1$. Las operaciones inducidas están definidas por:

(1) $x \otimes_i y = (x \otimes y) \wedge i = x \otimes y$
ya que $x \otimes y \leq x \wedge y$

(2) $x \rightarrow_i y = (x \rightarrow y) \wedge i$

$(\otimes_i, \rightarrow_i)$ conforman un par adjunto, y $([0, i], \leq_i, \otimes_i)$ es reticulado residual integral, ya que $([0, i], \otimes_i, i)$ es monoide ordenado.
Aplicando los lemas anteriores a estas definiciones se comprueba que:

$$([0, i], \leq_i, \otimes_i)$$

es un reticulado residual divisible lineal.

□

Observación 3.1.2 Del resultado anterior se sigue que $([0, \neg i], \leq_{\neg i}, \otimes_{\neg i})$ es reticulado residual divisible lineal.

Teorema 3.1.1 *Todo reticulado residual divisible lineal puede representarse como un producto de la forma* $[0, i] \times [0, \neg i]$, *siendo i la negación de un idempotente.*[7]

demostración
Por los lemas 3.1.1 a 3.1.4, $([0, i] \times [0, \neg i], \preceq, \odot)$ resulta un reticulado residual divisible lineal, si se define:

$(a, b) \preceq (a', b')$ si y sólo si $a \leq_i a', b \leq_i b'$

$(a, b) \odot (a', b') = (a \otimes_i a', b \otimes_{\neg i} b')$

De donde:

$(a, b) \Rightarrow (a', b') = (a \rightarrow_i a', b \rightarrow_{\neg i} b')$

$(0, 0), (i, \neg i)$ el primer y último elemento respectivamente.

$(\mathcal{L}, \leq, \otimes)$ es isomorfo a $([0, i] \times [0, \neg i], \preceq, \odot)$ como reticulados residuales, por $\varphi : \mathcal{L} \longrightarrow [0, i] \times [0, \neg i]$ definida del siguiente modo:

$$\varphi(a) = (a \wedge i, a \wedge \neg i)$$

□

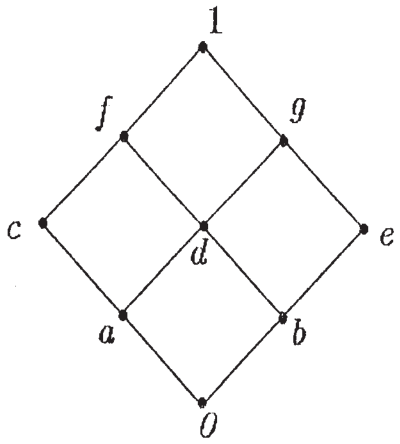
[7]Este teorema, conjuntamente con la observación anterior, constituyen una generalización de lo probado por J.A. Rodríguez en su tesis doctoral para MV álgebras. [7]

Observación 3.1.3 Si 0 y 1 son las únicas negaciones de elementos idempotentes la representación indicada resulta trivial.
La existencia de elementos idempotentes cuya negación no sea nula garantiza una representación no trivial.
En la sección 4 estudiaremos propiedades de estos elementos.

3.2 Ejemplos

Ejemplo 3.1

Consideremos el siguiente reticulado



Con las operaciones definidas por:

$\otimes$	0	a	b	c	d	e	f	g	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	a	0	0	a	0	a
b	0	0	b	0	b	b	b	b	b
c	0	a	0	c	a	0	c	a	c
d	0	0	b	a	b	b	d	b	d
e	0	0	b	0	b	e	b	c	e
f	0	a	b	c	d	b	f	d	f
g	0	0	b	a	b	e	d	e	g
1	0	a	b	c	d	e	f	g	1

$\rightarrow$	0	a	b	c	d	e	f	g	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a	g	1	g	1	1	g	1	1	1
b	c	c	1	c	1	1	1	1	1
c	e	g	e	1	g	e	1	g	1
d	a	c	g	c	1	g	1	1	1
e	c	c	g	c	g	1	f	1	1
f	0	a	e	c	g	e	1	g	1
g	a	c	g	c	f	g	f	1	1
1	0	a	b	c	d	e	f	g	1

De acuerdo con esta tabla, los elementos que son negaciones de idempotentes son:

$$0, c, e, 1$$

y, en consecuencia las posibles descomposiciones son las siguientes:

(1) $[0,0] \times [0,1]$, que es la descomposición trivial.

(2) $[0,c] \times [0,e]$

$\otimes$	0	a	c
0	0	0	0
a	0	0	a
c	0	a	c

$\rightarrow$	0	a	c
0	c	c	c
a	a	c	c
c	0	a	c

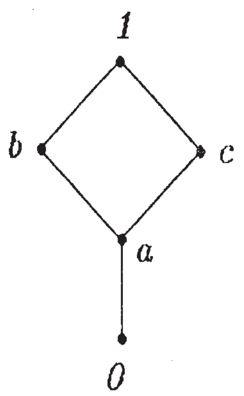
$\otimes$	0	b	e
0	0	0	0
b	0	b	b
e	0	b	e

$\rightarrow$	0	b	e
0	e	e	e
b	0	e	e
e	0	b	e

En estas cadenas observamos que los únicos elementos idempotentes que son negación de idempotentes son el primer y el último elemento de cada una.

Ejemplo 3.2

Consideremos el álgebra de Heyting $\mathcal{L}$ determinada por el siguiente diagrama de Hasse:



Considerando $\otimes = \wedge$ se verifica que $(\mathcal{L}, \leq \wedge)$ es un reticulado residual divisible lineal. Los únicos elementos negaciones de idempotentes son 0 y 1, por lo cual la descomposición indicada resulta trivial.

4 Elementos idempotentes y booleanos de un reticulado residual

4.1 Propiedades de los elementos idempotentes

Lema 4.1.1 *Sea $(\mathcal{L}, \leq, \otimes)$ un reticulado residual con 0 y 1, x un elemento idempotente de $\mathcal{L}$. Entonces* $x \leq x \rightarrow y$ *si y sólo si* $x \leq y$

demostración
Resulta de la condición de par adjunto. □

Del lema resultan los siguientes corolarios de demostración inmediata:

Corolario 4.1.1 *$x \leq \neg x$ si y sólo si $x = 0$*

Corolario 4.1.2 *$x \not\leq \neg x$ si y sólo si $x = 0$*

Corolario 4.1.3 *Si $(\mathcal{L}, \leq)$ es una cadena, $x \neq 0$, entonces $x > \neg x$*

Observación 4.1.1

Es claro, entonces, en virtud de los corolarios anteriores que en una cadena que sea un reticulado residual divisible (que por ser totalmente ordenado en lineal), la única negación de un elemento idempotente es el 0. Es decir, son indescomponibles según nuestra propuesta.

4.2 Elementos booleanos

Definición 4.2.1

Sea $(\mathcal{L}, \leq, \otimes)$ un reticulado residual con 0 y 1, llamaremos *elemento booleano* a x, si existe algún elemento y satisfaciendo:

$$x \wedge y = 0$$
$$x \vee y = 1$$

Lema 4.2.1 *En un reticulado residual divisible lineal si x es booleano, $x \vee \neg x = 1$, $x \wedge \neg x = 0$, siendo $\neg x = x \rightarrow 0$.*

demostración
Por ser x booleano existe y tal que $x \wedge y = 0, x \vee y = 1$. Considerando $\neg x = x \rightarrow 0 = \bigvee\{t : x \otimes t = 0\}$ y que por ser integral se verifica $x \otimes t \leq x \wedge t$ es claro que $y \leq \neg x$ y, en consecuencia, $1 = x \vee y \leq x \vee \neg x$. Es decir $x \vee \neg x = 1$.
Además, por ser $\mathcal{L}$ un reticulado divisible lineal $\neg(x \wedge \neg x) = \neg x \vee \neg\neg x \geq \neg x \vee x$, de donde $\neg(x \wedge \neg x) = 1$ y, en consecuencia $x \wedge \neg x = 0$.
En virtud de la linealidad el reticulado es distributivo y por lo tanto $y = \neg x$. □

Lema 4.2.2 *En un reticulado residual divisible lineal todo x booleano es idempotente.*

demostración
Basta considerar que $x = x \otimes 1$ y reemplazando el 1 por $x \vee \neg x$ y aplicando propiedad distributiva del producto con respecto al supremo obtenemos $x = x \otimes x$. □

Corolario 4.2.1 *En un reticulado residual divisible lineal x es booleano si y sólo si x es negación de idempotente.*

demostración
Inmediata, ya que los elementos idempotentes de un reticulado divisible lineal conforman un álgebra de Heyting. [5] □

Observación 4.2.1 En una MV álgebra, por ser la negación una involución, cualquier elemento idempotente es un elemento booleano. (Es decir, los elementos idempotentes de una MV álgebra conforman un álgebra de Boole). [3]

Teorema 4.2.1 *Para que $(\mathcal{L}, \leq, \otimes)$, reticulado residual divisible lineal sea descomponible es condición necesaria y suficiente que exista un elemento booleano no trivial en $\mathcal{L}$. En ese caso, si x es el elemento booleano, resulta $\mathcal{L} = [0, x] \times [0, \neg x]$*

La demostración de este teorema es inmediata a partir del teorema 3.1.1 y el corolario 4.2.1.

Caso particular: Probaremos ahora que todo reticulado lineal finito con más de un átomo es descomponible.

Teorema 4.2.2 *Todo reticulado residual divisible finito lineal con más de un átomo tiene al menos un elemento booleano no trivial.*

demostración

Supongamos que $(\mathcal{L}, \leq, \otimes)$ tiene sólo dos átomos.

Sean a y b los átomos de $\mathcal{L}$. Es claro que $a \wedge b = 0$, si $a \vee b = 1$ hemos encontrado el elemento buscado.
Si $a \vee b \neq 1$ sea:

$a_1 = a$

a_{i+1} un cubrimiento de a_i, tal que $a_{i+1} \wedge b = 0, i \geq 1$.

$A = \{a_i\}_{i \in I}$

Como el reticulado es finito es claro que la cadena A es finita y sea a' su último elemento. Es claro que $a' \wedge b = 0$. Si $a' \vee b = 1$ Hemos hallado el elemento buscado.
Si $a' \vee b \neq 1$ sea:

$b_1 = b$

b_{i+1} un cubrimiento de b_i, tal que $b_{i+1} \wedge a' = 0$.

$B = \{b_i\}_{i \in I}$

Como el reticulado es finito es claro que la cadena B es finita y sea b' su último elemento. Es claro que $a' \wedge b' = 0$. Veamos que necesariamente $a' \vee b' = 1$.
En efecto: en virtud del lema 2.1.1-viii)

$$a' \to 0 = a' \to b'$$
$$b' \to 0 = b' \to a'$$

además, por la linealidad $(a' \to b') \vee (b' \to a') = 1$. Es decir, para acabar la demostración del teorema resta ver que:

(i) $\neg a' = a' \to 0 = b'$

(ii) $\neg b' = b' \to 0 = a'$

Observemos que $a' \otimes b' \leq a' \wedge b' = 0$, de donde resulta $\neg a' \geq b'$, ya que $a' \to 0 = \bigvee\{t : a' \otimes t = 0\}$.
Por otra parte, ya que $a' \otimes t \leq a' \wedge t$, cualquiera que sea t es claro que $\{t : a' \otimes t = 0\} \subseteq \{t : a' \wedge t = 0, t \geq b\}$ y, por lo tanto $\neg a' = \bigvee\{t : a' \wedge t = 0, t \geq b\}$, es decir:$\neg a' = b'$.
Para probar (ii) el razonamiento es semejante.

Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ los átomos de $\mathcal{L}$.

Consideramos:

$a = x_1$

$b = \bigvee\limits_{i=2}^{n} x_i$

y realizamos un procedimiento análogo al caso anterior. □

Corolario 4.2.2 *Un reticulado residual finito lineal es descomponible si y sólo si posee más de un átomo.*

demostración
La condición suficiente se deduce del teorema. Por otra parte, para la condición necesaria observemos que si un reticulado $\mathcal{L}$ es descomponible, entonces existe x en $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{L} = [0, x] \times [0, \neg x]$. Sean a un átomo de $[0, x]$ y b un átomo de $[0, \neg x]$. Es claro que $(a, 0)$ y $(0, b)$ son átomos de $\mathcal{L}$. □

Referencias

[1] G. Birkhoff, *Lattice theory 3rd edition*, AMS Coll. Publ. Providence (1967).

[2] D. Brignole, R. Entizne *Estructuras algebraicas para la lógica fuzzy*, Informe técnico interno n° 54 - INMABB - UNS - CONICET - Bahía Blanca (1996).

[3] C. C. Chang, *Algebraic analysis of many valued logics*, Trans. Am. Math. Soc. Sc. Math. 88 (1958), 467–490.

[4] R. P. Dilworth and M. Ward, *Residuated lattices*, Trans. Am. Math. Soc. Sc. Math. 45 (1939), 335–354.

[5] U. Höhle, *Commutative, residuated l-monoids*, Non classical logics and their applications to fuzzy systems - Kluwer A. Publ.- Dordrecht, The Netherlands (1995), 53–106.

[6] J. Pavelka, *On fuzzy logic II: Enriched residuated lattices and semantics of propositional calculi*, Zeitschr.f.math.Logik und Grundlagen d. Math.Bd.25. (1979), 135–162.

[7] A.J.Rodríguez, *Un estudio algebraico de los cálculos proposicionales de Lukasiewicz*, Tesis Doctoral, Univ. de Barcelona (1980)

[8] E. Trillas, C. Alsina, J.M.Terricabras *Introducción a la lógica Borrosa*, Ed. Ariel. Barcelona (1995).

[9] E. Turunen, *Algebraic structures in fuzzy logic*, Fuzzy sets and systems, North Holland 52 (1992) 181–188.

Rosana V. Entizne
Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur
8000 Bahía Blanca, Argentina.
e-mail: rentizne@criba.edu.ar

Diana M. Brignole
Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur
8000 Bahía Blanca, Argentina.
e-mail: brignole@criba.edu.ar