EL ÁLGEBRA DE q-OPERADORES DIFERENCIALES Y SU HOMOLOGÍA

MARÍA JULIA REDONDO Y ANDREA SOLOTAR

Sea q un número complejo $\neq 0, 1$, y sea D_q el álgebra de q-operadores diferenciales en $\mathbf{C}[x, x^{-1}]$. Por definición [2] D_q es el álgebra de todos los endomorfismos lineales de $\mathbf{C}[x, x^{-1}]$, generada por multiplicaciones de polinomios de Laurent y por el q-operador diferencial ∂_q definido para todo polinomio P por

$$\partial_q(P) = \frac{P(qx) - P(x)}{qx - x}.$$

Entonces D_q es la $\mathbf{C}$-álgebra asociativa generada por x, x^{-1} y ∂_q, con la relación $\partial_q x - qx\partial_q = 1$. Sea $\eta_q \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}[x, x^{-1}])$ definido por $\eta_q(x) = qx$. Como $\eta_q = 1 + (q-1)x\partial_q$, entonces el automorfismo η_q pertenece a D_q. El q-operador diferencial ∂_q no es una derivación, pero sí es una η_q-derivación, esto es, si $P, Q \in \mathbf{C}[x, x^{-1}]$, entonces

$$\partial_q(PQ) = \eta_q(P)\partial_q(Q) + \partial_q(P)Q.$$

Se define el módulo $\Omega^q_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}[x, x^{-1}])$ de η_q-diferenciales en $\mathbf{C}[x, x^{-1}]$ que nos permitirá construir un q-complejo de De Rham. Existe una biyección entre la homología de Hochschild de D_q y la homología del q-complejo de De Rham de la $\mathbf{C}$-álgebra S generada por x, x^{-1} y ξ, con la relación $\xi x = qx\xi$.

BIBLIOGRAFÍA

1. J.L.Brylinski, *Some examples of Hochschild and cyclic homology*, Lectures Notes in Mathematics **1271** (1987), Springer Verlag, 33–72.
2. C.Kassel, *Cyclic homology of differential operators, the Virasoro algebra and a q-analogue*, Commun. Math. Phys. (1992).
3. K.R.Mount and O.E.Villamayor, *Taylor series and higher derivations*, Impresiones previas Dep. de Matemática (1969), Univ. de Buenos Aires.
4. M.J.Redondo y A. Solotar, *α-Derivations*, Aceptado para su publicación en Canadian Mathematical Bulletin.
5. M.Wodzicki, *Cyclic homology of differential operators*, Duke Math. **54** (1987).

Cohomología BRST: Un Complejo Doble aplicado a la Física

JAVIER FERNANDEZ*
DEPTO. DE MATEMÁTICA - F.C.E.Y N. - U.B.A.
MARCELA ZUCCALLI
DEPTO. DE MATEMÁTICA - F.C.E. - U.N.L.P.

Marzo de 1995

Presentamos una cohomolgía de origen algebro-geométrico con aplicaciones a la física.

Desde un punto de vista puramente algebraico la construcción que nos interesa consta de un complejo doble formado a partir de un complejo de Koszul y otro (K, d_1) análogo al complejo de Chevalley-Eilenberg para el cálculo de la homología de álgebras de Lie[1]. Todos estos complejos cuentan con representaciones de un álgebra de Lie g. La cohomología del complejo (Z-graduado) asociado a este complejo doble es la *cohomología BRST*. La construcción del complejo se completa al explicitar la información geométrica involucrada en el complejo de Koszul.

Bajo condiciones que implican la aciclicidad de una de las resoluciones (de modo que la sucesión espectral colapsa en el segundo término), se tiene que:

$$H^0_{BRST}(S) \cong H^0_{d_1}(S)^g \tag{1}$$

donde el lado izquierdo denota la cohomología BRST mientras que el derecho representa los elementos g-invariantes de la cohomología respecto del operador d_1.

El marco geométrico habitual que enmarca esta construcción es el de una variedad simpléctica sobre la que se tiene una acción de un grupo de Lie compatible con la mencionada estructura[2]. Una aplicación de esto es el estudio de subvariedades de variedades simplécticas en el marco del proceso de reducción tipo Marsden-Weinstein. En este caso la cohomología BRST (via ec. (1)) permite tener una descripción de las funciones definidas sobre la variedad reducida. Otra aplicación de este formalismo es en el caso de sistemas lagrangianos con simetrías. En este marco se entiende el método de Faddeev-Popov como una elección de un nuevo representante para el lagrangiano de una teoría sin cambiar la clase de cohomología a la que pertenece. Por ultimo mencionemos que esta cohomología provee una herramienta poderosa en la cuantización de sistemas con vínculos[3].

---

*e-mail: javierf@mate.dm.uba.ar

[1] Forger, M. y Kellendonk, K., *Classical BRST Cohomology and Invariant Functions on Constraint Manifolds I*, Commun. Math. Phys. *143* 235 (1992).

[2] Guillemin, V. y Sternberg, S., *Symplectic techniques in physics*, Cambridge, 1984.

[3] Henneaux, M. y Teitelboim, C., *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press,

Módulos de dimension proyectiva infinita sobre álgebras con todos sus ideales idempotentes proyectivos

Flavio U.Coelho, Eduardo Marcos, Héctor Merklen, María Inés Platzeck

Sea A un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, tal que todos sus ideales biláteros idempotentes son A-módulos a izquierda proyectivos. Demostramos que si A es de tipo de representación finito y no es un álgebra hereditaria, entonces existen infinitos A-módulos no isomorfos indescomponibles de dimensión proyectiva infinita.

En la demostración utilizamos, por un lado, el siguiente resultado de [2] : Un álgebra de artin con todos sus ideales idempotentes proyectivos tiene dimensión proyectiva finitista menor o igual que 1, esto es, si un módulo tiene dimensión proyectiva finita, entonces ésta es a lo sumo 1. Por otro lado, hacemos uso de la descripción hecha en [1] de las álgebras finitamente generadas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado con todos sus módulos indescomponibles, salvo un número finito, de dimensión proyectiva a lo sumo 1.

1. I. Assem and F. U. Coelho, *Glueings of tilted algebras*, J. of Pure and Applied Algebra, to appear.
2. M. I. Platzeck, *Artin rings with all idempotent ideals projective*, preprint, 1994.

Caracterización de las álgebras de tipo H

F.Levstein y A. Tiraboschi

Se consideran las álgebras de Lie nilpotentes de paso 2 reales. Dentro de esta clase se encuentran las llamadas álgebras de tipo H que generalizan a las álgebras de Heisenberg. Estas se definen a partir de un producto escalar en el espacio vectorial que subyace al álgebra.

En este trabajo se obtiene una caracterización de estas álgebras independiente del producto escalar. Esto permite determinar algorítmicamente si un álgebra dada es de tipo H o no.

MARTINS, Ma. Izabel Ramalho (Universidade de São Paulo-Brasil)
Composition Factors of Indecomposable Modules

Let Λ be a basic and connected Artin algebra. Denote by Λ-mod the category of all finitely generated left Λ-modules and by Λ-ind the full subcategory of Λ-mod defined by one representative of each isomorphism class of indecomposable Λ-modules. We investigate the following properties and a relationship between them.

Property P.A: Each M in Λ-ind is uniquely determined by its composition factors;

Property P.II: Each M in Λ-ind is multiplicity-free.

Firstly, we study Nakayama algebras and we obtain necessary and sufficient conditions for each one of the properties above to be satisfied.

Our main results are related to biserial algebras of representation-finite type. We consider Λ to be a finite-dimensional algebra over an algebraically closed field with the following property.

Property P.I: Λ is biserial and Λ-ind satisfies P.A.

Pogorzaly and Skowroński have proved that, in case Λ is a factor of a hereditary algebra (which means that the ordinary quiver of Λ has no loops nor cycles), P.I. is equivalent to P.II. One of our main results is the following. Suppose the ordinary quiver of Λ does not have loops, then P.I implies P.II. We give a counter-example showing that the converse is not true in general. Specifically we exhibit an algebra of quivers with relations which contains cycles.

In order to obtain this result, we do a fairly thorough study of the multiplicities of the composition factors of the indecomposable Λ-modules, which quocient by a simple module (dually a submodule) is of type A_n or a direct sum of two modules of type A_n. Besides, we obtain, with some control over the cycles, that the multiplicity-free indecomposable Λ-modules, which are not non-uniserial projective-injective, are of type A_n.

ALGEBRAS DE DE MORGAN MONADICAS LIBRES

Alejandro Petrovich

Un álgebra de De Morgan monádica [5] es un álgebra $(A, \vee, \wedge, \neg, \nabla, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 1, 1, 0, 0)$, tal que $(A, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ es un álgebra de De Morgan y ∇ satisface: $\nabla 0 = 0$, $\nabla(a \vee b) = \nabla a \vee \nabla b$, $a \wedge \nabla a = a$, $\nabla(a \wedge \nabla b) = \nabla a \wedge \nabla b$ y $\nabla(-\nabla a) = \neg \nabla a$. El operador ∇ se denomina cuantificador. Estas álgebras son una natural generalización de las álgebras de Boole monádicas introducidas por Halmos en [4].

En [3] Halmos da una construcción del espacio de Stone de un álgebra de Boole monádica libre y en [2] Cignoli prueba que dicha construcción, mediante el uso de los espacios de Priestley, se puede adaptar a los denominados Q-reticulados distributivos [1], que son reticulados distributivos asociados con un cuantificador. El propósito de esta comunicación es mostrar que también existe una construcción del espacio de De Morgan de un álgebra de De Morgan monádica libre adaptando las técnicas dadas por Halmos.

References

[1] R. Cignoli, *Quantifiers on distributive lattices*, Discrete Math., **96** (1991), 183–197.

[2] R. Cignoli, *Free Q-distributive lattices*, Studia Logica, to appear.

[3] P.R. Halmos, *Free monadic algebras*, Proc. Amer. Soc., **10** (1959), 219–227. Reproducido en [4].

[4] P.R. Halmos, *Algebraic logic*, Chelsea, New York, 1962.

[5] A. Petrovich, *Monadic De Morgan algebras*, manuscrito.

Notes on Free Monadic Boolean Algebras

Luiz F. Monteiro, Manuel Abad, Sonia Savini and Julio Sewald

INMABB-UNS-CONICET and Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur - Bahía Blanca - Argentina

Free monadic Boolean algebras were extensively studied by several authors. The first paper about the determination of these algebras is due to Carnap (J. Symbolic Logic 11) in 1946. He uses propositional calculus, but he gives the cardinality without proofs. Then H. Bass (Proc. Amer. Math. Soc. 9) in 1958 gives a new determination of these algebras, and later, P. Halmos (Proc. Amer. Math. Soc. 10) also in 1958, indicates another construction (see also Chelsea Pub. Co. New York, 1962). In 1963, Héng-Shan Gao (Shuxue Jinzhan 6) gets a different construction (this paper was published in chinese). In 1970, A. Masse gives a talk in a seminar on Algebraic Logic, held at the University of Lyon, in which he essentially reproduces Bass's work. In 1971, L. Henkin, D. Monk and A. Tarski, in the book "Cylindric Algebras", Part I, determine the free Poliadic Boolean Algebras.

Finally, in 1973, L. Monteiro gives a new determination of free finite Monadic Algebras in a seminar held at Bahía Blanca under the direction of A. Monteiro. However, this work was published in 1978 in Algebra Universalis, 8, with completely different proofs.

These notes are inspired in the work of H. Bass, but our notations and demonstrations are closer to universal algebra than his. In addition, we give other results, generalize some of his conclusions and essentially our work differs from his in that our construction of the finitely-generated, free monadic Boolean algebras is easier that that given by him.

If $FB(2^n-1)$ denotes the Boolean algebra with 2^n-1 free generators and $\mathbf{P}(2^n)$ is the cartesian product of 2^n Boolean algebras all equal to $FB(2^n-1)$, then $\mathbf{P}(2^n)$ is a Boolean algebra. We define on $\mathbf{P}(2^n)$ an existential quantifier $\exists$ by means of a relatively complete Boolean subalgebra of $\mathbf{P}(2^n)$ and we prove that $(\mathbf{P}(2^n), \exists)$ is the monadic Boolean algebra with n free generators. Every element of $\mathbf{P}(2^n)$ is a 2^n-tuple whose coordinates are in $FB(2^n-1)$; in particular, so are the n generators of $\mathbf{P}(2^n)$. We indicate in this work the coordinates of the n generators of $\mathbf{P}(2^n)$.

ESTABILIDAD DE POLITOPOS

Alvarez, M. y Cendra, H.

Se identifican los polinomios $a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n$ con coeficientes $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n-1$ con los puntos $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Se define $\mathbf{H}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ como el conjunto de los polinomios estables, es decir, polinomios tales que sus raíces tienen todas parte real negativa. En [1] se ha probado que un politopo convexo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ está contenido en $\mathbf{H}^n$ si y sólo si el conjunto A de sus aristas está contenido en $\mathbf{H}^n$.

Sin embargo se concluye fácilmente a partir de ejemplos que, en ciertos casos, se puede determinar una parte $A' \subsetneq A$ tal que $A' \subseteq \mathbf{H}^n$ implica $\Omega \subseteq \mathbf{H}^n$. El modo de seleccionar un tal subconjunto $A' \subsetneq A$ con la propiedad mencionada, no es único. En [2] se establece un criterio para determinar un conjunto $A' \subsetneq A$ y un conjunto de vértices V tales que $A' \cup V \subseteq \mathbf{H}^n$ implica $\Omega \subseteq \mathbf{H}^n$.

En esta comunicación presentamos parte de un trabajo donde se demuestra que es posible determinar un tal conjunto A' de la siguiente manera:

Como Ω es convexo, para cada semirrecta l por el origen y dirigida en el sentido del octante positivo de $\mathbb{R}^n$ la intersección $l \cap \Omega$ es un segmento o es el conjunto vacío. Al punto de $l \cap \Omega$ más cercano a 0 lo llamaremos *iluminado* y es claro que dicho punto está en $\partial\Omega$. Sea $\Omega_i \subseteq \partial\Omega$ el conjunto de todos los puntos iluminados y sea $A' = A \cap \Omega_i$. Establecemos el siguiente resultado cuya demostración se realiza usando esencialmente [3]:

Proposición. *Si* $A' \subseteq \mathbf{H}^n$ *entonces* $\Omega \subseteq \mathbf{H}^n$.

Referencias

[1] A.C. Bartlett, C.V. Hollot and L.Lin, "Root locations of an entire polytope of polynomials: It suffices to check the edges," *Math. of Control Signal and Systems*, vol. 1, pp. 61 - 71, 1988.

[2] A. Rantzer, "Estability Conditions for Polytopes of Polynomials," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, pp. 79 - 89, enero 1992.

[3] C. Robledo, A. Desages, H.Cendra, "On the distance to the instability border of Hurwitz polynomials with coefficients that depend affinely on m parameters and a particular convexity property of $\mathbf{H}^n$," *Multidim. Syst. and Signal Processing*, vol.3, pp. 45 - 61, 1992.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Las siguientes comunicaciones ya figuran en la sección TRABAJOS

A. Benedek y R. Panzone (INMABB), *Sobre algunos notables conjuntos planos, III: La piel del dragón.*

A. Basile (Universitá Federico II, Nápoli), *From large economies to uniform semigroup-valued measures*

M. Abad (UNS) and J.P. Díaz Varela (INMABB - UNS), *Free algebras in some subvarieties of Ockham algebras*

A. L. Barrenechea y C. C. Peña (UNC), *Sobre algunos operadores no simétricos*

S. A. Celani (Universidad de Barcelona, España) y A. V. Figallo (UNS), *De Morgan algebras with an additional operation*

J. J. Tolosa (UNS), *ΔI_3 Algebras con infimo*

S. E. Trepode (UNMDP y Universidad de Sao Paulo), *La conjetura de Roldán en el caso $\tilde{A}_n$*

A. Ziliani (UNS), *On axioms and some properties of monadic four-valued modal algebras*

J. O. Araujo y R. M. Gamondi (UNICEN), *Sobre generadores y relaciones en grupos finitos*

La siguiente comunicación no fue expuesta por ausencia de su autor:

M. Ronco (UBA), *El anillo universal de vectores de Witt de un lambda-anillo.*