Grupos abelianos reticulados libres

ROBERTO CIGNOLI

En lo que sigue, un ℓ-grupo significará un *grupo* abeliano *reticulado*, esto es, un sistema $\langle G, +, -, \vee, \wedge, 0\rangle$ tal que $\langle G, +, -, 0\rangle$ es un grupo *conmutativo*, $\langle G, \vee, \wedge\rangle$ es un reticulado y las siguientes condiciones de compatibilidad son satisfechas, donde x, y, z denotan elementos arbitrarios de G:

$$x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z) \tag{1}$$

$$x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z) \tag{2}$$

Con $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{R}$ denotaremos los grupos aditivos de los enteros, racionales y reales, respectivamente, cada uno con su orden natural.

El siguiente resultado se encuentra en el Apéndice del libro de Bigard, Keimel y Wolfenstein [1]:

Teorema 1 *Sea κ un cardinal. El ℓ-grupo libre sobre κ, $\mathbf{F}(\kappa)$, es isomorfo al ℓ-subgrupo del ℓ-grupo de las funciones $f\colon \mathbf{Z}^\kappa \to \mathbf{Z}$ generado por las funciones proyección $\{\mathbf{x}_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$.*

A partir de este teorema no es difícil dar la siguiente descripción de $\mathbf{F}(\kappa)$ (ver [1]): Sea $\mathbf{G}(\kappa)$ el subgrupo de $\mathbf{Z}^{\mathbf{Z}^\kappa}$ generado por las funciones proyección, esto es

$$\mathbf{G}(\kappa) = \{\sum_{\alpha\in\kappa} n_\alpha \mathbf{x}_\alpha \mid n_\alpha \in \mathbf{Z} \text{ } y \text{ } n_\alpha = 0 \textit{ salvo un número finito de índices}\}$$

Entonces:

$$\mathbf{F}(\kappa) = \{\bigvee_i \bigwedge_j f_{ij} \mid \{f_{ij}\} \textit{ familia finita de elementos de } \mathbf{G}(\kappa)\}$$

A título de ejemplo, tomemos $\kappa = 1$. Como para $\{m_1, \ldots, m_k\} \subset \mathbf{Z}$, se tiene que:

$$m_1 x \wedge m_2 x \wedge \cdots \wedge m_k x = \begin{cases} \min\{m_1, \ldots, m_k\}x & \text{si } x \geq 0 \\ \max\{m_1, \ldots, m_k\}x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

resulta que los ínfimos de familias finitas de elementos de $\mathbf{G}(1)$ son de la forma

$$f(x) = \begin{cases} mx & \text{si } x \geq 0 \\ nx & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{con } m, n \in \mathbf{Z} \text{ y } m \leq n \tag{3}$$

y como los supremos de familias finitas de funciones de la forma (3) son de la forma:

$$g(x) = \begin{cases} mx & \text{si } x \geq 0 \\ nx & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{con } m, n \in \mathbf{Z}$$

podemos identificar al ℓ-grupo libre con un generador con el ℓ-grupo formado por los pares ordenados de enteros, con la suma definida coordenada a coordenada y las operaciones de reticulado definidas por

$$(m, n) \vee (p, q) = (\max\{m, p\}, \min\{n, q\})$$
$$(m, n) \wedge (p, q) = (\min\{m, p\}, \max\{n, q\})$$

Esto es. $\mathbf{F}(1) \cong \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$, donde $\mathbf{Z}^*$ denota el grupo aditivo de los enteros con el orden dual. El generador libre (que se corresponde con la función identidad de $\mathbf{Z}$ en $\mathbf{Z}$), es el par $(1, 1)$ (cf [2. Chapter XIII, §4, Exercise 6]).

En el caso general, podemos decir que los elementos de $\mathbf{F}(\kappa)$ son funciones "lineales a trozos".

En [1] se destaca la siguiente consecuencia del Teorema 1:

Corolario 2 *Todo ℓ-grupo es imagen homomorfa de un sub-ℓ-grupo de un producto de copias de $\mathbf{Z}$.*

Recordemos que un *término* en el lenguaje de ℓ-grupos es una expresión $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ que se obtiene combinando formalmente algunas de las variables $x_1, \ldots, x_n$ y la constante 0 por medio de las operaciones $+$, $-$, $\vee$ y $\wedge$ y los paréntesis. Por ejemplo, $(((x_1 + x_3) \vee 0) - x_4)$ es un término en las variables $x_1, \ldots, x_6$. Una *ecuación* en el lenguaje de ℓ-grupos es una expresión de la forma $\tau(x_1, \ldots, x_m) = \sigma(y_1, \ldots, y_n)$, donde τ y σ denotan términos.

Dado un término $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ y una n-upla $(a_1, \ldots, a_n)$ de elementos de un ℓ-grupo G, indicaremos por $\tau^G(a_1, \ldots, a_n)$ al elemento de G que se obtiene reemplazando cada variable x_i por el elemento a_i, $i = 1, \ldots, n$, y efectuando las operaciones indicadas en τ.

Se dice que la ecuación $\tau(x_1, \ldots, x_m) = \sigma(y_1, \ldots, y_n)$ *es satisfecha* por un ℓ-grupo G si para toda m-upla $(a_1, \ldots, a_m)$ y toda n-upla $(b_1, \ldots, b_n)$ de elementos de G, se tiene que $\tau^G(a_1, \ldots, a_m) = \sigma^G(b_1, \ldots, b_n)$.

Por ejemplo, (1) y (2) son ecuaciones que son satisfechas por todos los ℓ-grupos.

Observemos que como

$$\tau^G(a_1, \ldots, a_m) = \sigma^G(b_1, \ldots, b_n) \, \textit{si y sólo si} \, \tau^G(a_1, \ldots, a_m) - \sigma^G(b_1, \ldots, b_n) = 0$$

podemos limitarnos a considerar ecuaciones de la forma $\tau(x_1, \ldots, x_m) = 0$.

Sean G y H ℓ-grupos, y $h: G \to H$ un homomorfismo de ℓ-grupo (es decir, h es un homomorfismo de grupo y un homomorfismo de reticulado). Para todo término $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ y toda n-upla $(a_1, \ldots, a_n) \in G^n$ se tiene que

$$(4) \qquad h(\tau^G(a_1, \ldots, a_m)) = \tau^H(h(a_1), \ldots, h(a_m))$$

Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de ℓ-grupos, y $G = \prod_{i\in I} G_i$. Para todo término $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ y toda n-upla $(f_1, \ldots, f_n) \in G^n$ se tiene que

$$\text{(5)} \qquad \textit{Para cada } i \in I, (\tau^G(f_1, \ldots, f_n))(i) = \tau^{G_i}(f_1(i), \ldots, f_n(i))$$

De (4) resulta que si una ecuación es satisfecha por un ℓ-grupo G, entonces también es satisfecha por toda imagen homomorfa de G, y de (5) se deduce que si una ecuación es satisfecha por todos los miembros de una familia de ℓ-grupos, entonces también es satisfecha por el ℓ-grupo producto de la familia. Además, es claro que si una ecuación es satisfecha por un ℓ-grupo G, entonces también es satisfecha por todo sub- ℓ-subgrupo de G. D e estas consideraciones y del Corolario 2 se obtiene el resultado siguiente:

Corolario 3 *Una ecuación es satisfecha por todos los ℓ-grupos si y sólo si es satisfecha por el ℓ-grupo* $\mathbf{Z}$.

En otras palabras, *la clase ecuacional de los ℓ-grupos está generada por* $\mathbf{Z}$.

Un resultado de álgebra universal (ver, por ejemplo, [6, p. 176]) nos dice que si una clase ecuacional $\mathcal{E}$ está generada por un álgebra A, entonces el álgebra libre sobre un conjunto de cardinal κ en $\mathcal{E}$ es isomorfa a la subálgebra de A^{A^κ} generada por las funciones proyección $\mathbf{x}_\alpha\colon A^\kappa \to A$, $\alpha \in \kappa$.

Por lo tanto, el Teorema 1 es consecuencia del Corolario 3, y ambos enunciados resultan ser equivalentes.

En un trabajo conjunto con Mundici [4] hemos dado una demostración simple y directa del Corolario 3, que utiliza básicamente herramientas elementales de álgebra lineal, y los siguientes resultados de la teoría de los ℓ -grupos, cuyas demostraciones no dependen ni del Teorema 1 ni de sus corolarios:

Teorema 4 (Birkhoff [2,1]) *Todo ℓ-grupo es isomorfo a un sub-ℓ-grupo del producto de una familia de grupos totalmente ordenados.*

Teorema 5 ([2,1]) *Todo ℓ-grupo es sin torsión.*

Del Teorema 4 resulta que una ecuación es satisfecha por todos los ℓ-grupos si y sólo si es satisfecha por todos los ℓ-grupos totalmente ordenados. Luego si una ecuación $\tau(x_1, \ldots, x_m) = 0$ no es satisfecha por algún ℓ-grupo, existirá un ℓ-grupo totalmente ordenado G que tampoco la satisface. Esto significa que en G podremos encontrar elementos $a_1, \ldots, a_n$ tales que $\tau^G(a_1, \ldots, a_m) > 0$. Del Teorema 5 resulta que el subgrupo de G generado por los elementos $a_1, \ldots, a_n$ es isomorfo a $\mathbf{Z}^r$, con $r \leq n$. Luego cada elemento a_i puede pensarse como un vector $\mathbf{a}_i \in \mathbf{R}^r$ con coordenadas enteras, para $i = 1, \ldots, n$.

Utilizando resultados básicos de separación de convexos en el espacio euclideano $\mathbf{R}^r$ (o, equivalentemente, propiedades de sistemas de inecuaciones lineales), se prueba la existencia de números reales $\xi_1, \ldots, \xi_n$, independientes sobre $\mathbf{Q}$, y tales que el vector $\mathbf{v} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ tiene la propiedad que el producto escalar $\mathbf{v} \cdot \mathbf{z} > 0$ para todo $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}^r$ de la forma $\mathbf{z} = \sigma^{\mathbf{Z}^r}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$, donde $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$ es un subtérmino de $\tau(x_1, \ldots, x_n)$. En particular, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i > 0$ para $i = 1, \ldots, n$, y $\mathbf{v} \cdot \tau^{\mathbf{Z}^r}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) > 0$.

Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{Z}^r$, definamos $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ si y sólo si $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \geq 0$. Resulta que la relación $\preceq$ es un orden total sobre $\mathbf{Z}^r$, compatible con la estructura de grupo aditivo. Llamemos H a este ℓ-grupo totalmente ordenado.

Por ser los números $\xi_1, \ldots, \xi_n$ independientes sobre $\mathbf{Q}$, resulta que la aplicación:

$$\theta: (n_1, \ldots, n_r) \mapsto \xi_1 n_1 + \cdots + \xi_r n_r$$

es un isomorfismo de ℓ-grupo de H en $\mathbf{R}$.

Por consiguiente, $\tau^{\mathbf{R}}(\theta(\mathbf{a}_1), \ldots, \theta(\mathbf{a}_n)) > 0$. Un argumento de continuidad muestra que hay números racionales $q_1, \ldots, q_n$ tales que $\tau^{\mathbf{Q}}(q_1, \ldots, q_n) > 0$, y multiplicando por el máximo común denominador de $q_1, \ldots, q_n$ encontraremos enteros $p_1, \ldots, p_n$ tales que $\tau^{\mathbf{Z}}(p_1, \ldots, p_n) > 0$. Esto significa que $\mathbf{Z}$ no satisface la ecuación $\tau(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Luego, si una ecuación no es satisfecha por algún ℓ-grupo,

tampoco es satisfecha por $\mathbf{Z}$. Estos son los pasos esenciales de

la demostración del Corolario 3 dada en [4].

Como ya dijimos, del Corolario 3 se deduce, por argumentos de álgebra universal, el Teorema 1.

Finalmente, conviene observar que los ℓ-grupos están estrechamente vinculados a las álgebras de las lógicas polivalentes de Łukasiewiz. En [3], utilizamos el Corolario 2 para dar una demostración algebraica de la completud de un sistema de axiomas propuesto por Łukasiewicz para el cálculo proposicional infinito-valente. Utilizando ideas similares a las de [4], en el trabajo conjunto con Mundici [5], damos una demostración elemental y autocontenida de la completud de dichos axiomas.

References

[1] A. Bigard, K. Keimel and S. Wolfenstein, **Groupes et anneaux réticulés**, Lectures Notes in Mathematics vol. 608, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[2] G. Birkhoff, **Lattice Theory** (Third Edition), Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1967.

[3] R. Cignoli, *Free lattice-ordered abelian groups and varieties of MV-algebras,* In:"Proceedings of the IXth Latin American Symposium on Mathematical Logic, I", Notas de Lógica Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, **38** (1993), 113-118.

[4] R. Cignoli and D. Mundici, *An elementary proof that if an equation holds in the integers then it holds in every lattice-ordered abelian group*, a publicarse.

[5] R. Cignoli and D. Mundici, *An elementary proof of Chang's completeness theorem for the infinite-valued calculus of Łukasiewicz*, Studia Logica, a publicarse.

[6] P.M. Cohn, **Universal algebra**, Harper & Row, London, 1965.

Departamento de Matemática,
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Buenos Aires.
Ciudad Universitaria, Pabellón II,
1428 Buenos Aires.
Correo electrónico: postmast@cignol.uba.ar