Héctor A. Merklen

# MÓDULOS TELARAÑA Y APLICACIONES

## Álgebras de caminos y representaciones.

La teoría de representaciones de álgebras sobre un cuerpo $k$ ha realizado diversos progresos en el sentido de aprovechar algunos contextos claramente combinatorios.

Uno de éstos consiste en considerar *álgebras de carcajes (o aljabas) atados.* La idea es definir el álgebra a partir de una *aljaba* (o *grafo orientado*) finita $Q$ y relacionar los módulos con ciertas representaciones de $Q$.

Una aljaba $Q = (Q_0, Q_1, o, e)$ es dada por un conjunto de *vértices*, $Q_0$, y un conjunto de *flechas*, $Q_1$, explicitados como tales por dos funciones $o, e : Q_1 \to Q_0$ que determinan el *origen* $o(\alpha)$ y el *fin* $e(\alpha)$ de cada flecha $\alpha$. Los *caminos orientados* de $Q$ son, básicamente, sucesiones finitas $(y \mid \alpha_s \cdots \alpha_1 \mid x)$ tales que, para $s \geq 1)$, $o(\alpha_1) = x, e(\alpha_s) = y, o(\alpha_{i+1}) = e(\alpha_i)$ $(i = 1, ..., s-1)$ y, para $s = 0$, deben tener $x$ igual a $y$: $(x \mid\mid x)$, definiendo el *camino trivial* asociado a $x$.

Tomando los vértices de $Q$ como objetos y los conjuntos de caminos de $x$ en $y$, $Q(x, y)$, como conjuntos de morfismos de $x$ en $y$ se obtiene una categoría en la que la composición es simplemente la yuxtaposición de caminos, y en la que la identidad de cada objeto es el camino trivial asociado a él.

El *álgebra*, sobre $k$, de los caminos de $Q$, $kQ$, es (casi) la $k$-linearización de esa categoría. Es el $k$-espacio vectorial que tiene como base el conjunto de los caminos de $Q$ con la multiplicación inducida por la composición de caminos (que se "completa" estableciendo que el producto de dos caminos que no se pueden componer es igual a *cero*).

$kQ$ tiene dimensión finita si y sólo si $Q$ no tiene circuitos orientados y, en ese caso, el 1 de $kQ$ es la suma de los caminos triviales.

Es claro que $kQ = \sum_{x \in Q_0} kQ.(x \mid\mid x)$, y no es difícil demostrar que los idempotentes $(x \mid\mid x)$ son irreducibles. Por lo tanto, $kQ.(x \mid\mid x)$ $(x \in Q_0)$ es una familia completa de representantes de los módulos proyectivos indecomponibles de $kQ$.

Una $k$-representación de $Q$ es una familia $(M_x, f_\alpha)$ en que $M_x$ es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $k$ y donde, para cada flecha $\alpha$ de $Q$, $f_\alpha$ es una aplicación $k$-lineal de $M_{o(\alpha)}$ em $M_{e(\alpha)}$ . Una tal representación se denota por un diagrama en que se pone $M_x$ en el lugar de $x$ y $f_\alpha$ encima de la flecha $\alpha$. Generalmente, se prefiere escribir $k^{n(x)}$ (donde $n(x) = dim_k M_x$) en lugar de $M_x$ y, en lugar de $f_\alpha$, la matriz rectangular que la define relativamente a las bases canónicas.

Damos a continuación un ejemplo de representación.

$$Q \quad \cdot \xrightarrow{\alpha} \cdot \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightrightarrows}} \cdot \qquad\qquad k^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} k^3 \underset{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}{\overset{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{\rightrightarrows}} k^2.$$

Es fácil de ver que cada representación de $Q$, $M$, define un $kQ$-módulo si se toma $M = \sum_{x \in Q_0} M_x$ y se define la multiplicación por $(x \parallel x)$ como igual a la identidad en la componente $M_x$ e igual a 0 en las componentes restantes, y la multiplicación por una flecha $\alpha$ como la aplicación $f_\alpha$ de $M_{o(\alpha)}$ en $M_{e(\alpha)}$ y 0 en las componentes restantes.

Recíprocamente, todo $kQ$-módulo origina obviamente una $k$-representación de $Q$, obteniéndose así una equivalencia entre esas dos categorías.

**2.**

Una *aljaba atada*, $(Q, I)$ es una aljaba $Q$ con un ideal *admisible*, $I$, de $kQ$, esto es un ideal $I$ cuyos elementos son combinaciones lineales de caminos de longitud no menor que 2 y con la propiedad de que, para una cierta longitud $m$, $I$ contiene todos los caminos de longitud mayor o igual que $m$.

Las representaciones de $(Q, I)$ se corresponden con los $kQ$-módulos anulados por $I$, es decir con los $kQ/I$-módulos.

Un famoso teorema de P. Gabriel afirma que, salvo equivalencia de Morita, toda álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado puede pensarse como teniendo la forma $kQ/I$, donde $Q$ está determinada unívocamente, salvo isomorfismo.

Una *aljaba telaraña*, $Q'$, es una aljaba conexa sin circuitos. Tales aljabas definen las álgebras hereditarias básicas: $kQ'$.

Llamamos *módulos telarañas propios* a los que son dados por la representación de una telaraña $Q'$ que tiene, en el lugar de cada vértice, el espacio vectorial unidimensional, $k$, y sobre cada flecha la aplicación identidad.

Nuestra idea es caracterizar los módulos que, de una cierta manera "natural", son adaptaciones de módulos telaraña propios a aljabas que no son necesariamente telarañas.

Sea $A = kQ/I$ uma $k$-álgebra de dimensión finita y sea $M$ um $A$-módulo. Consideremos el siguiente processo. Supongamos que existe un camino de $Q$: $(x_2 \mid \alpha_s ... \alpha_1 \mid x_1)$ con la propiedad de que, para un cierto $m_1 \in M_{x_1}$, $m_s =: M(\alpha_s)...M(\alpha_1)(m_1)$ es no nulo, y tal que los vectores $m_i = M(\alpha_i)...M(\alpha_1)(m_1)$ generan $M$ sobre $k$. Entonces es claro que $M$ es obtenido a partir de un módulo telaraña de tipo bien simple: tipo sucesión, o tipo cadena orientada.

Un poco más general es el caso en que, procediendo en forma análoga, partimos de un zig-zag, de una sucesión de cadenas orientadas como la precedente, pero con sentidos opuestos, cuyos vértices se pueden representar por vectores de $M$ que generan $M$. En ese caso, parece natural decir que $M$ es un telaraña de tipo zig-zag (o de tipo $\mathbf{A}_n$). Lo que tenemos en este caso es que un módulo telaraña propio de una aljaba $Q'$ de tipo $\mathbf{A}_n$ es, de algún modo, "aplicado" sobre $Q$ para que se obtenga el módulo $M$.

Finalmente, la situación más general que nos interesa es aquella en que, por el mismo procedimiento, lleva a un módulo que se obtiene a partir de un módulo telaraña propio cualquiera. Los módulos $M$ obtenidos por ese proceso son los que llamamos *módulos telaraña*[1].

## 4. El resultado principal.

Nuestro resultado principal es el siguiente (ver **M**).

TEOREMA. *Todo módulo telaraña es un módulo indescomponible.*

[1]Debemos hacer la observación de que es necesario exigir ciertos detalles de carácter técnico sobre los cuales no podemos extendernos aquí. Para ello, remitimos al lector interesado a nuestro artículo citado al final.

La demostración es basada en ciertos hechos puramente combinatorios que permiten un argumento por inducción en el número de ***nudos*** de la telaraña.

## 5. Ejemplos y aplicaciones.

En el estado presente de las investigaciones, la principal aplicación del resultado anterior es usarlo como criterio de indescomponibilidad.

Por ejemplo, si $A$ es el álgebra de Kronecker, es decir el álgebra de caminos de la aljaba $\cdot \rightrightarrows \cdot$, es bien sabido que la familia de sus módulos preproyectivos indescomponibles puede ser definida como sigue. Salvo isomorfismo, el único preproyectivo indescomponible de dimensión 2n+1 tiene, en el vértice fuente, el espacio vectorial $k^{n+1}$ y, en el vértice pozo, el espacio $k^n$. Sobre la flecha superior tiene la matriz abajo, lado izquierdo, y sobre la flecha inferior la matriz del lado derecho.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que ese módulo es telaraña de tipo $\mathbf{A}_n$.

Algo análogo ocurre con los indecomponibles del álgebra de Kronecker que son llamados preinyectivos.

Por lo tanto, la indescomponibilidad de esos módulos resulta por aplicación directa de nuestra teorema.

En nuestro artículo citado abajo damos otros ejemplos, incluyendo casos en que *todos* los módulos indescomponibles de una cierta álgebra son módulos telaraña.

# Referencia.

[M] H. Merklen – *Web modules and applications*, J. Number Th. **51** (1995) 136 – 146.