El Anillo Clasificante de un Grupo de Lie Semisimple

Juan Tirao

Sea $G_\circ$ un grupo de Lie semisimple no compacto conexo con centro finito y sea $K_\circ$ un subgrupo maximal compacto de $G_\circ$. Si $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ denotan las complexificaciones de las álgebras de Lie de $K_\circ$ y de $G_\circ$ respectivamente, $U(\mathfrak{g})$ será el álgebra envolvente universal de $\mathfrak{g}$ y $U(\mathfrak{g})^K$ denotará el centralizador de $\mathfrak{k}$ en $U(\mathfrak{g})$.

Por ejemplo podemos tomar $G_\circ = \mathrm{SL}(\mathrm{n}, \mathbb{R})$, $K_\circ = \mathrm{SO}(\mathrm{n})$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(\mathrm{n}, \mathbb{C})$ y $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(\mathrm{n}, \mathbb{C})$. El álgebra $U(\mathfrak{g})$ es un álgebra asociativa, noconmutativa, con identidad, de dimensión infinita sobre $\mathbb{C}$ y generada por $\mathfrak{g}$. Está definida por la propiedad universal de que toda representación del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se extiende a una única representación del álgebra asociativa $U(\mathfrak{g})$. Se la puede construir como cociente del álgebra tensorial $T(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ dividida por el ideal bilátero generado por $\{x \otimes y - y \otimes x - [x, y] : x, y \in \mathfrak{g}\}$, y es canónicamente isomorfa al álgebra de operadores diferenciales invariantes a izquierda sobre el grupo de Lie $G_\circ$.

Por los trabajos fundacionales de Harish-Chandra sabemos que muchos aspectos de la teoría de representaciones de dimensión infinita de $G_\circ$ se reducen a propiedades de la estructura y de la teoría de reprentaciones de dimensión finita del álgebra $U(\mathfrak{g})^K$, conocida también como el anillo clasificante del grupo de Lie $G_\circ$ (cf. Cooper [4]).

Brevemente, la razón de ésto es la siguiente: a cada representación (casi-simple) irreducible π de $G_\circ$ en un espacio de Banach le está asociado un $(U(\mathfrak{g}), K_\circ)$-módulo irreducible V que es localmente finito como $K_\circ$-módulo, y que determina a π salvo equivalencia infinitesimal. Más precisamente tenemos una descomposición primaria $V = \bigoplus V_\delta$, donde la suma se extiende sobre el conjunto $\hat{K}_\circ$ de todas las clases de equivalencia δ de representaciones irreducibles de dimensión finita de $K_\circ$, y la multiplicidad de δ es finita para toda $\delta \in \hat{K}_\circ$. Entonces cada V_δ es un $U(\mathfrak{g})^K$-módulo de dimensión finita. Pero además el propio V como $(U(\mathfrak{g}), K_\circ)$-módulo está completamente determinado por V_δ como $(U(\mathfrak{g})^K, K_\circ)$-módulo para cualquier δ tal que $V_\delta \neq 0$. Ver Lepowsky and McCollum [13] y Lepowsky [12] para hallar una excelente exposición de ésto. Ver también Dixmier [5] and Wallach [17].

Cuando $V_{\delta_\circ} \neq 0$, siendo $\delta_\circ$ la clase de la representación trivial de $K_\circ$, entonces π se llama esférica. El enfoque anterior ha sido utilizado con mucho éxito por B. Kostant para estudiar las representaciones irreducibles esféricas de $G_\circ$ (ver Kostant [9]). En este caso podemos tomar $\delta = \delta_\circ$ y considerar solamente el cociente $U(\mathfrak{g})^K/I$ en lugar de $U(\mathfrak{g})^K$. Aquí I es la intersección de $U(\mathfrak{g})^K$ con el ideal izquierdo en $U(\mathfrak{g})$ generado por $\mathfrak{k}$. Ahora por otro teorema de Harish- Chandra, $U(\mathfrak{g})^K/I$ no sólo es conmutativa sino isomorfa a un anillo de polinomios en r variables, siendo r el rango split de $G_\circ$.

Más precisamente tenemos una sucesión exacta de álgebras

$$0 \to I \to U(\mathfrak{g})^K/I \xrightarrow{\gamma} U(\mathfrak{a})^{\widetilde{W}} \to 0 \tag{1}$$

donde $\mathfrak{a}$ es el álgebra de Lie compleja asociada a una descomposición de Iwasawa $G_\circ =$

$K_\circ A_\circ N_\circ$ de $G_\circ$ adaptada a $K_\circ$, y $U(\mathfrak{a})^{\widetilde{W}}$ es el anillo de $\widetilde{W}$-invariantes en $U(\mathfrak{a})$, siendo $\widetilde{W}$ el grupo de Weyl trasladado.

Para investigar el caso general (no necesariamente esférico) desde este punto de vista debemos tener en cuenta toda el álgebra $U(\mathfrak{g})^K$ y no solamente $U(\mathfrak{g})^K/I$. Sabemos (ver e.g. Kostant and Tirao [11]) que la aplicación (1) puede reemplazarse por una sucesión exacta

$$0 \to U(\mathfrak{g})^K \xrightarrow{P} U(\mathfrak{k})^M \otimes U(\mathfrak{a})$$

donde $U(\mathfrak{k})^M$ denota al centralizador de $M_\circ$ en $U(\mathfrak{k})$, $M_\circ$ es el centralizador de $A_\circ$ en $K_\circ$ y $U(\mathfrak{k})^M \otimes U(\mathfrak{a})$ tiene la estructura producto tensorial de álgebras. Además P es un antihomomorfismo de álgebras.

Para generalizar (1) es necesario determinar la imagen de P. Para esto hemos introducido en [16] una subálgebra B de $U(\mathfrak{k})^M \otimes U(\mathfrak{a})$ definida por un conjunto de ecuaciones derivadas de ciertas inmersiones de módulos de Verma y la subálgebra $B^{\widetilde{W}}$ de todos los elementos en B que conmutan con ciertos operadores de entrelazamiento. Tales operadores están en correspondencia uno a uno con los elementos del grupo de Weyl W y están íntimamente relacionados con los operadores de entrelazamiento de Kunze-Stein. Además hemos probado que la imagen de P está contenida en $B^{\widetilde{W}}$, y que cuando $G_\circ$ =SO(n,1) o SU(n,1) tenemos $P(U(\mathfrak{g})^K) = B^{\widetilde{W}}$. De aquí podemos deducir que en estos dos casos $U(\mathfrak{g})^K \simeq Z(\mathfrak{g}) \otimes Z(\mathfrak{k})$, donde $Z(\mathfrak{g})$ y $Z(\mathfrak{k})$ denotan respectivamente los centros de $U(\mathfrak{g})$ y de $U(\mathfrak{k})$. Pero otro teorema de Harish-Chandra dice que estos centros son anillos de polinomios en rango($\mathfrak{g}$) and rango($\mathfrak{k}$) indeterminadas, respectivamente. Por lo tanto la estructura de los anillos clasificantes de SO(n,1) y de SU(n,1) queda determinada. Hoy en día hay varias demostraciones de este hecho (Cooper [4], Benabdallah [2], Knop [7]) sin embargo poco se sabe de la estructura del anillo clasificante en el caso general, mas allá de que es un álgebra finitamente generada y de que su centro es un anillo de polinomios (Knop [8]). No obstante pensamos que la determinación de la imagen de $U(\mathfrak{g})^K$ debería ser útil para atacar el caso general, o al menos los casos de rango uno que faltan: Sp(n,1) y F_4.

Pasamos a dar una idea de las demostraciones. La aplicación $P\colon U(\mathfrak{g})^K \to U(\mathfrak{k})^M \otimes U(\mathfrak{a})$ es la restricción de la proyección correspondiente a la suma directa

$$U(\mathfrak{g}) = (U(\mathfrak{k}) \otimes U(\mathfrak{a})) \oplus U(\mathfrak{g})\mathfrak{n},$$

asociada a la descomposición de Iwasawa $G_\circ = K_\circ A_\circ N_\circ$ de $G_\circ$ adaptada a $K_\circ$. Por ejemplo en el caso $G_\circ = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ podemos tomar $K_\circ = \mathrm{SO}(n)$, $A_\circ$ igual al subgrupo de $G_\circ$ formado por todas las matrices diagonales y $N_\circ$ igual al grupo de todas las matrices triangulares superiores con unos en la diagonal.

En Lepowsky [12] se demuestra que $P\colon U(\mathfrak{g})^K \to U(\mathfrak{k})^M \otimes U(\mathfrak{a})$ es un antihomomorfismo de álgebras. Recordemos que se trata de determinar la imagen de $U(\mathfrak{g})^K$ en $U(\mathfrak{k})^M \otimes U(\mathfrak{a})$.

Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la descomposición de Cartan correspondiente a $K_\circ$, y denotemos indistintamente con θ la correspondiente involución de Cartan de $G_\circ$ o de $\mathfrak{g}$. Además sea $M_\circ'$ el normalizador of $A_\circ$ in $K_\circ$. Entonces $W = M_\circ'/M_\circ$ es el grupo de Weyl.

Dado $w \in M'_\circ$ sea $\bar{N}_w = \bar{N}_\circ \cap w^{-1} N_\circ w$, donde $\bar{N}_\circ = \theta(N_\circ)$. Si $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ consideramos

$$T(w,\lambda) : f \to \int_{\bar{N}_w} e^{-(\lambda+\rho)H(v)} f(w\kappa(v))dv, \quad f \in C^\infty(K_\circ).$$

Para λ en un cono abierto $S(w) \subset \mathfrak{a}^*$, $T(w,\lambda)$ define una distribución sobre $K_\circ$ (ver Schiffmann [14]). Más aún como $T(w,\lambda)$ está íntimamente relacionada con el correspondiente operador de entrelazamiento de Kunze-Stein se puede demostrar (ver Kostant, Tirao [11,Theorem 3.2]) que

$$T(w,\lambda) * P(u)(-\lambda-\rho) = P(u)(-w(\lambda)-\rho) * T(w,\lambda)$$

vale para todo $u \in U(\mathfrak{g})^K$. Ahora consideremos el conjunto $\left(U(\mathfrak{k})^M \otimes U(\mathfrak{a})\right)^{\widetilde{W}}$ de todos los elementos $b \in U(\mathfrak{k})^M \otimes U(\mathfrak{a})$ tales que

$$T(w,\lambda) * b(-\lambda-\rho) = b(-w(\lambda)-\rho) * T(w,\lambda), \quad \lambda \in S(w).$$

Esta es una ecuación en el álgebra $D'(K_\circ) \supset U(\mathfrak{k})$ de todas las distribuciones sobre $K_\circ$. Claramente

$$P(U(\mathfrak{g})^K) \subset \left(U(\mathfrak{k})^M \otimes U(\mathfrak{a})\right)^{\widetilde{W}}.$$

Si $U(\mathfrak{a}) = \bigoplus_{j\geq 0} U_j(\mathfrak{a})$ es la graduación canónica de $U(\mathfrak{a})$ y $b \in U(\mathfrak{k})^M \otimes U(\mathfrak{a})$, podemos escribir de manera única $b = b_d + b_{d-1} + \cdots + b_0$ con $b_j \in U(\mathfrak{k})^M \otimes U_j(\mathfrak{a})$. En Kostant, Tirao [11, Theorem 4.5] se demostró que si $b \in \left(U(\mathfrak{k})^M \otimes U(\mathfrak{a})\right)^{\widetilde{W}}$ entonces b_d es W-invariant, bajo la acción canónica del grupo de Weyl en $U(\mathfrak{k})^M \otimes U(\mathfrak{a})$. A partir de este hecho se probó también que hay maneras apropiadas de completar una localización de $U(\mathfrak{g})^K$ y correspondientemente una localización de $\left(U(\mathfrak{k})^M \otimes U(\mathfrak{a})\right)^{\widetilde{W}}$ de forma que ambas devienen isomorfas (cf. Kostant, Tirao [11, Theorem 7.4]).

Para caracterizar a $P(U(\mathfrak{g})^K)$ necesitamos encontar más relaciones que sean satisfechas por sus elementos. Para obtenerlas consideraremos ciertas inmersiones $M(\mu_1) \subset M(\mu_2)$ entre módulos de Verma.

Sea $\mathfrak{t}_\circ$ una subálgebra de Cartan del álgebra de Lie $\mathfrak{m}_\circ$ de $M_\circ$. Sea $\mathfrak{h}_\circ = \mathfrak{t}_\circ \oplus \mathfrak{a}_\circ$ y sea $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$ la correspondiente complexificación. Entonces $\mathfrak{h}_\circ$ y $\mathfrak{h}$ son subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}_\circ$ y $\mathfrak{g}$, respectivamente. Ahora elegimos una subálgebra de Borel $\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{m}^+$ de la complexificación $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{m}_\circ$ y tomamos $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}^+ \oplus \mathfrak{n}$ como subálgebra de Borel de $\mathfrak{g}$. Sea Δ^+ el correspondiente conjunto de raíces positivas, pongamos $\mathfrak{g}^+ = \mathfrak{m}^+ \oplus \mathfrak{n}$ y $\mathfrak{g}^- = \sum_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Además sea $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+} \alpha$.

Dado $\mu \in \mathfrak{h}^*$ sea

$$M(\mu) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbf{C}_{\mu-\rho}$$

donde $\mathbf{C}_{\mu-\rho}$ denota el $\mathfrak{b}$-módulo de dimensión uno en el que $\mathfrak{h}$ actúa por $\mu-\rho$ y $\mathfrak{g}^+$ actúa trivialmente. Entonces $M(\mu)$ tiene una estructura de $U(\mathfrak{g})$-módulo por multiplicación a izquierda en el primer factor, con un generador canónico $1_\mu = 1 \otimes 1$.

Si $\langle , \rangle$ denota la forma de Killing de $\mathfrak{g}$ y $(\mu, \alpha) = 2\langle \mu, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle = n \in \mathbf{N}$ para algún $\alpha \in \Delta^+$ entonces se sabe que $M(\mu - n\alpha) \subset M(\mu)$. En particular si α es una raíz simple y $X_{-\alpha}$ es un vector raíz no nulo correspondiente a $-\alpha$, entonces $X_{-\alpha}^n \cdot 1_\mu$ puede ser identificado con el generador canónico $1_{\mu - n\alpha}$ de $M(\mu - n\alpha) \subset M(\mu)$. Dada $\alpha \in \Delta^+$ sea $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ el único elemento tal que $(\mu, \alpha) = \mu(H_\alpha)$ para todo $\mu \in \mathfrak{h}^*$. También escribamos $H_\alpha = Y_\alpha + Z_\alpha$ donde $Y_\alpha \in \mathfrak{t}$ y $Z_\alpha \in \mathfrak{a}$, y sea $P^+ = \{\alpha \in \Delta^+ : Z_\alpha \neq 0\}$.

Si $\alpha \in P^+$ sea $\mathfrak{a}_\alpha = \{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) = 0\}$. Entonces $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\alpha \oplus \mathbf{C}Z_\alpha$ y podemos considerar a los elementos en $U(\mathfrak{k}) \otimes U(\mathfrak{a})$ como polinomios in Z_α con coeficientes en $U(\mathfrak{k}) \otimes U(\mathfrak{a}_\alpha)$. Si $\alpha \in P^+$ es una raíz simple, de la inmersión $M(\mu - n\alpha) \subset M(\mu)$, podemos deducir que para todo $u \in U(\mathfrak{g})^K$ el elemento $b = P(u)$ satisface

$$
\begin{aligned}
(2) \qquad & P(X_{-\alpha}^n)(n - Y_\alpha - 1)b(n - Y_\alpha - 1)) \\
& \equiv b(-n - Y_\alpha - 1))P(X_{-\alpha}^n)(n - Y_\alpha - 1)
\end{aligned}
$$

$\mathrm{mod}(U(\mathfrak{k})\mathfrak{m}^+ \otimes U(\mathfrak{a}_\alpha))$.

Las ecuaciones (2) definen una subálgebra B de $U(\mathfrak{k})^M \otimes U(\mathfrak{a})$. Más precisamente sean

$$B = \{b \in U(\mathfrak{k})^M \otimes U(\mathfrak{a}) : (2) \text{ se satisface para todo } \alpha \in P^+ \text{ simple, } n \in \mathbf{N}\}$$

y

$$B^{\widetilde{W}} = B \cap \left(U(\mathfrak{k})^M \otimes U(\mathfrak{a})\right)^{\widetilde{W}}.$$

Por lo tanto tenemos

$$P(U(\mathfrak{g})^K) \subset B^{\widetilde{W}}.$$

Ahora describiremos someramente como pensamos demostrar que

$$P(U(\mathfrak{g})^K) = B^{\widetilde{W}}$$

cuando $G_\circ$ es de rango 1. Este programa ha sido exitoso cuando $G_\circ$ =SO(n,1) o SU(n,1) (ver Tirao [16]).

De ahora en más asumiremos que rango($G_\circ$)=dim($A_\circ$)=1. Cuando $G_\circ$ =SO(n,1) (n$\neq$ 3), Sp(n,1) o F_4 hay una sola raíz simple $\alpha \in P^+$, cuando $G_\circ$ =SU(n,1) hay exactamente dos. Pongamos $E_\alpha = X_{-\alpha} + \theta(X_{-\alpha}) \in \mathfrak{k}$. Entonces el álgebra B que introdujimos es el conjunto de todos los $b \in U(\mathfrak{k})^M \otimes U(\mathfrak{a})$ tales que para todo $n \in \mathbf{N}$

$$(3) \qquad E_\alpha^n b(n - Y_\alpha - 1) \equiv b(-n - Y_\alpha - 1)E_\alpha^n \qquad \mathrm{mod}\ (U(\mathfrak{k})m^+)$$

para todo $\alpha \in P^+$ simple.

A esta altura necesitamos citar un teorema de restricción que probamos tiempo atrás. Sea G el grupo adjunto de $\mathfrak{g}$ y sea K el subgrupo de Lie conexo de G con álgebra de Lie $ad_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$. También sean $M = \mathrm{Centr}_K(\mathfrak{a})$, $M' = \mathrm{Norm}_K(\mathfrak{a})$, entonces $W \equiv M'/M$. Si H

es un grupo y V es un H-módulo de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$, sea $S(V^*)$ el anillo de todas las funciones polinomiales sobre V, y sea $S(V^*)^H$ el anillo de todos los H-invariantes. También denotemos con $S^n(V)$ y $S^n(V^*)$ los correspondientes subespacios homogéneos de $S(V)$ y $S(V^*)$ de grado n. Necesitaremos conocer la imagen del homomorfismo $\pi\colon S(\mathfrak{g}^*)^K \to S((\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{a})^*) = S(\mathfrak{k}^*)\otimes S(\mathfrak{a}^*)$ inducido por restricción de $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{a}$.

Denotemos con Γ al conjunto de todas las clases de equivalencia de representaciones irreducibles holomorfas de dimensión finita de K en V_γ tales que $V_\gamma^M \neq 0$. Cualquier $\gamma\in\Gamma$ puede realizarse como submódulo del módulo de todas las funciones polinomiales armónicas en $\mathfrak{p}$, homogéneas de grado d para un $d = d(\gamma)$ unívocamente determinado (Kostant, ver Kostant, Rallis [10]).

Sea $C = S(\mathfrak{k}^*)^M$ y sea $C_d = \bigoplus S(\mathfrak{k}^*)_\gamma^M$, la suma sobre todos los $\gamma\in\Gamma$ tales que $d(\gamma)\leq d$. Entonces $C = \bigcup_{d\geq 0} C_d$ es una interesante filtración ascentente de C. Ahora

$$D = \bigoplus_{d\geq 0}(C_d\otimes S^d(\mathfrak{a}^*))$$

es un álgebra, precisamente el álgebra de Rees asociada a la filtración $C = \bigcup_{d\geq 0} C_d$.

Theorem. (ver Tirao [15] and Andruskiewitsch, Tirao [1].) *La operación de restricción de $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{a}$ induce un isomorfismo de $S(\mathfrak{g}^*)^K$ sobre D^W.*

Si $a\in U(\mathfrak{k})^M$ definimos

$$d(a) = \min\{m : a \in \bigoplus_{\gamma\in\Gamma, d(\gamma)\leq m} U(\mathfrak{k})_\gamma^M\}$$

Si $0\neq b\in U(\mathfrak{k})\otimes U(\mathfrak{a})$ podemos escribir $b = b_m\otimes Z_\alpha^m + \cdots + b_0$ de manera única con $b_j\in U(\mathfrak{k})$ para $j = 0,\ldots,m$, $b_m\neq 0$. En este caso b_m se llama el coeficiente director de b. Del teorema anterior deducimos

Theorem. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*
(i) Para todo $b\in B^{\widetilde{W}}$ existe $u\in U(\mathfrak{g})^K$ tal que $P(u) = b$.
(ii) Si b_m es el coeficiente director de cualquier $b\in B^{\widetilde{W}}$ entonces $d(b_m)\leq m$.

Con mucho trabajo combinatorio y con el siguiente teorema de transversalidad establecido en Brega, Tirao [3,Theorem 2.11] logramos probar (ii) y por lo tanto nuestro teorema central cuando $G_\circ = \mathrm{SO}(n,1)_e$ o SU(n,1).

Theorem. *Si $G_\circ = \mathrm{SO}(n,1)_e$, $\mathrm{SU}(n,1)$ entonces la suma infinita $\sum_{j\geq 0}\dot{E}^j(U(\mathfrak{k})^M)$ es una suma directa. Más aún*

$$\Big(\sum_{j\geq 0}\dot{E}^j(U(\mathfrak{k})^M)\Big)\cap U(\mathfrak{k})\mathfrak{m}^+ = 0.$$

En colaboración con el Dr.Brega estamos tratando arduamente de establecer (ii) para $G_\circ$ =Sp(2,1).

REFERENCIAS

1. N. Andruskiewitsch and J. Tirao, *A restriction theorem for modules having a spherical submodule*, Trans. Amer. Math. Soc. **331** (1992), no. 2, 705-725.
2. A. Benabdallah, *Generateurs de l'algebre* $U(G)^K$ *avec* $G = \mathrm{SO}(n)$ *ou* SO_0 (1,m-1) et $K = \mathrm{SO}(m-1)$, Bull. Soc. Math. France **111** (1983), 303-326.
3. A. Brega and J. Tirao, *A transversality property of a derivation of the universal enveloping algebra* $U(k)$, *for* $G = \mathrm{SO}(n,1)$, $\mathrm{SU}(n,1)$, Manuscripta math. **74** (1992), 195-215.
4. A. Cooper, *The classifying ring of groups whose classifying ring is commutative*, Ph. D. Thesis (1975), MIT.
5. J. Dixmier, *Enveloping algebras*, North-Holland, Amsterdam, 1977.
6. K. Johnson, *The centralizer of a Lie algebra in an enveloping algebra*, J. reine angew. Math. **395** (1989), 196-201.
7. F. Knop, *Der zentralisator einer Liealgebra in einer einhüllenden Algebra*, J. reine angew. Math. **406** (1990), 5-9.
8. ———, *A Harish-Chandra Homomorphism for Reductive Group Actions, preprint* (1993), 1-36.
9. B. Kostant, *On the existence and irreducibility of certain series of representations*, Lie groups and their representations (1975), Wiley, New York, 231-330.
10. B. Kostant and S. Rallis, *Orbits and representations associated with symmetric spaces*, Amer. J. Math. **93** (1971), 753-809.
11. B. Kostant and J. Tirao, *On the structure of certain subalgebras of a universal enveloping algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **218** (1976), 133-154.
12. J. Lepowsky, *Algebraic results on representations of semisimple Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **176** (1973), 1-44.
13. J. Lepowsky and.
14. G. Schiffmann, *Integrales d'entrelacement et fonctions de Whittaker*, Bull. Soc. Math. France **99** (1971), 3-72.
15. J. Tirao, *A restriction theorem for semisimple Lie groups of rank one*, Trans. Amer. Math. Soc. **279** (1983), no. 2, 651-660.
16. ———, *On the centralizer of K in the universal enveloping algebra of SO(n,1) and SU(n,1)*, Manuscripta math. (1994).
17. N. Wallach, *Real reductive groups I*, Academic Press, San Diego, 1988.