ΔI_3 - ALGEBRAS CON INFIMO

Juan J. Tolosa

Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur,
Avda. Alem 1253, 8000 - Bahía Blanca, Argentina.

Abstract

En este trabajo estudiamos una clase ecuacional de álgebras, que hemos llamado $S\Delta I_3$ - álgebras, las cuales constituyen una contrapartida algebraica del fragmento del cálculo proposicional trivalente de Lukasiewicz, donde sólo participan los conectivos $\to$ (implicación de Lukasiewicz), $\wedge$ (conjunción) y Δ (necesidad).
Las $S\Delta I_3$ - álgebras son una extensión de las ΔI_3 - álgebras y de las SI_3 - álgebras introducidas en [2] y [3] respectivamente.

1 ΔI_3 - álgebras con ínfimo

Definición 1.1 *Una ΔI_3 - álgebra con ínfimo (o $S\Delta I_3$ - álgebra) es un álgebra* $(A, \to, \wedge, \Delta, 1)$ *de tipo* $(2,2,1,0)$ *satisfaciendo las identidades:*

A1) $1 \to x = x$, A2) $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1$,

A3) $(x \to y) \to y = (y \to x) \to x$, A4) $((x \to y) \to (y \to x)) \to (y \to x) = 1$,

A5) $((x \to (x \to y)) \to x) \to x = 1$,

A6) $\Delta x \to y = x \to (x \to y)$, A7) $\Delta(\Delta x \to y) = \Delta x \to \Delta y$,

A8) $(x \wedge y) \to y = 1$, A9) $x \to (y \wedge z) = (x \to z) \wedge (x \to y)$.

De los axiomas A1 a A5 resulta que $(A, \to, 1)$ es un álgebra implicativa trivalente de Lukasiewicz (o una I_3 - álgebra), A. Monteiro [7] (ver también [4]). De los axiomas A1 a A7 se tiene que $(A, \to, \Delta, 1)$ es una ΔI_3 - álgebra, A. V. Figallo [2] y de A1 a A5 y A8 y A9 $(A, \to, \wedge, 1)$ es una SI_3 - álgebra, A. V. Figallo y J. Tolosa [3].

Representaremos con $\mathcal{V}$ a la variedad de las $S\Delta I_3$ - álgebras.

Ejemplo 1.1 Sobre $T = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ definimos las operaciones $\to$, $\wedge$ y Δ por medio de las tablas

$\to$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

$\wedge$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

x	Δx
0	0
$\frac{1}{2}$	0
1	1

Entonces $\mathcal{T} = (T, \to, \wedge, \Delta, 1) \in \mathcal{V}$ y las únicas subálgebras propias de $\mathcal{T}$ son

$B=\{0,1\}$ y $\{1\}$.

Lema 1.1([2,3,7]) *Para toda $A\in\mathbf{T}$ se verifican las siguientes propiedades:*

P1) *A está parcialmente ordenado por la relación $\leq$ definida por: $x\leq y$ si, y sólo si $x\to y=1$; además $x\leq 1$ para todo x en A,*

P2) *$(A,\leq)$ es un conjunto reticulado superior tal que el supremo de los elementos $x,y\in A$ es el elemento $x\vee y=(x\to y)\to y$,*

P3) *si A es acotada, esto es, existe un elemento $0\in A$ satisfaciendo $0\leq x$, entonces poniendo para todo par $x,y\in A$, $\sim x=x\to 0$, $\nabla x=\ \sim x\to x$, $x\wedge y=\ \sim(\sim x\vee\sim y)$, se verifica que $\mathbf{L}(A)=(A,\vee,\wedge,\sim,\nabla,1)$ es un álgebra de Lukasiewicz trivalente en la que vale $x\to y=(\nabla\sim x\vee y)\wedge(\nabla y\vee\sim x)$.*

P4) *valen las identidades $x\Rightarrow(y\Rightarrow x)=1$, $(x\Rightarrow(y\Rightarrow z))\Rightarrow((x\Rightarrow y)\Rightarrow(x\Rightarrow z))=1$, $((x\Rightarrow y)\Rightarrow x)\Rightarrow x=1$, $1\Rightarrow x=x$, donde $x\Rightarrow y=x\to(x\to y)$,*

P5) *$(A,\leq)$ es un conjunto reticulado inferior donde el ínfimo de los elementos $x,y\in A$ es $x\wedge y$,*

P6) *si $\vee$ es la operación indicada en P2), entonces $(A,\vee,\wedge,1)$ es un reticulado distributivo con último elemento 1.*

Definición 1.2 *Sea $A\in\mathbf{T}$. $D\subseteq A$ es un sistema deductivo (s.d.) de A si verifica:*

D1) $1\in D$, D2) *$x, x\to y\in D$ implican $y\in D$.*

Sean $A,B\in\mathbf{T}$, con $\mathfrak{D}(A)$ y $\mathcal{E}(A)$ representaremos a los conjuntos de todos los s.d y todos los s.d. maximales de A, y con $Hom(A,B)$ ($Epi(A,B)$) representaremos el conjunto de todos los homomorfismos (epimorfismos) de A en B (de A sobre B).

Lema 1.2 ([2,3,7]) *Si $A,B\in\mathbf{T}$ y $h\in Hom(A,B)$, entonces $Ker(h)=\{x\in A\colon h(x)=1\}$, llamado el núcleo de h, es un s.d. de A.*

Lema 1.3 ([2,3,7]) *Sea $A\in\mathbf{T}$ y $D\subseteq A$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(*i*) $D\in\mathfrak{D}(A)$,

(*ii*) *D verifica las condiciones* D1 y D'2) *$x, x\Rightarrow y\in D$ implican $y\in D$.*

Con $Con(A)$ denotaremos el conjunto de todas las congruencias de $A\in\mathbf{T}$. Si $R\in Con(A)$, $x_R, A/R$ y $q_R\colon A\to A/R$ representan la clase de equivalencia de $x\in A$, el álgebra cociente y el homomorfismo definido por $q_R(x)=x_R$, respectivamente.

Lema 1.4 ([2,3,7]) *Sea $A\in\mathbf{T}$, $D\in\mathfrak{D}(A)$, $R(D)=\{(x,y)\colon x\to y\in D, y\to x\in D\}$, entonces:*

(*i*) $R(D) \in Con(A)$,

(*ii*) $1_{R(D)} = D$,

(*iii*) *para cada* $R \in Con(A)$ *existe* $D \in \mathfrak{D}(A)$ *tal que* $D = 1_R$ *y* $R(D) = D$.

Teorema 1.1 ([2, 3]) *Sea* $A \in \mathbf{\Upsilon}$ *con más de un elemento, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(*i*) *A es simple,*

(*ii*) *A es isomorfa a una de las álgebras $\mathfrak{T}$ o B indicadas en el Ejemplo 1.1.*

Observación 1.1 Como las congruencias de una $S\Delta I_3$-álgebra están determinadas por los s.d. de dicha álgebra, y el operador $\Rightarrow$ verifica las identidades dadas en P4, entonces teniendo en cuenta D′2 y los resultados de A. Monteiro indicados en [8] podemos afirmar que:

(*i*) Todo s.d. propio de A es intersección de s.d. maximales de A. En particular se verifica $\cap\{M: M \in \mathcal{E}(A)\} = \{1\}$.

(*ii*) Para toda $A \in \mathbf{\Upsilon}$ las siguientes condiciones son equivalentes:

  (*a*) $M \in \mathcal{E}(A)$,

  (*b*) A/M es un álgebra simple.

(*iii*) Si $A \in \mathbf{\Upsilon}$ tiene más de un elemento entonces es producto subdirecto de álgebras simples y si A es finita, entonces $A \approx \prod_{M \in \mathcal{E}(A)} A/M$. En efecto, como A es finita tiene un primer elemento, luego podemos considerar el álgebra de Lukasiewicz trivalente $\mathfrak{L}(A)$ de P3, y aplicar resultados conocidos para estas álgebras (ver [5] y [6]).

2 $S\Delta I_3$-álgebras libres finitamente generadas

Si c es un número cardinal positivo, denotaremos con $L(c)$ a la $S\Delta I_3$-álgebra que tiene un conjunto G de generadores libres que verifica $|G| = c$. Más precisamente, $L(c)$ es tal que:

(*i*) $L(c)$ tiene un conjunto G de generadores tal que $|G| = c$,

(*ii*) Para cualquier función f de G en una $S\Delta I_3$-álgebra A, existe $h \in Hom(L(c), A)$ tal que $h(g) = f(g)$ para todo $g \in G$.

Como $\mathbf{\Upsilon}$ es una variedad, por un resultado de G.Birkhoff [1], tenemos que existe $L(c)$ para todo cardinal $c > 0$.

Sea $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ un conjunto de generadores libres de $L(n)$. Denotaremos con $\mathcal{T}^G$ al conjunto de todas las funciones de G en $\mathcal{T} = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

Lema 2.1 *La aplicación $\varphi(h) = Ker(h)$ establece una biyección entre los conjuntos $Hom(L(n), \mathcal{T})$ y $\mathcal{S}(L(n))$.*

Dem.

Sea $M \in \mathcal{S}(L(n))$ y $q_M: L(n) \to L(n)/M$ el epimorfismo natural. Por el Teorema 1.1 existe un endomorfismo i: $L(n)/M \to \mathcal{T}$ tal que $i \circ q_M = h \in Hom(L(n), \mathcal{T})$ y $\varphi(h) = M = Ker(h)$, luego φ es sobre.

Por otra parte, como el único automorfismo de $\mathcal{T}$ es la identidad, podemos afirmar que si $h_1, h_2 \in Hom(L(n), \mathcal{T})$ son tales que $Ker(h_1) = Ker(h_2)$ entonces vale $h_1 = h_2$. Por lo tanto φ es inyectiva. $\square$

Si n es un entero positivo entonces $L(n)$ es un álgebra finita. En efecto, de la Observación 1.1(iii) resulta que existe un homomorfismo inyectivo de $L(n)$ en $\prod_{M \in \mathcal{S}(L(n))} L(n)/M$. Además por el Teorema 1.1 y la Observación 1.1(ii) se verifica que $|L(n)/M| \leq 3$, para todo $M \in \mathcal{S}(L(n))$.

Por otra parte es fácil ver que $Hom(L(n), \mathcal{T})$ es un conjunto finito. Entonces por el Lema 2.1 $\mathcal{S}(L(n))$ es un conjunto finito y por lo tanto $L(n)$ es finita.

Luego por la Observación 1.1,(iii) podemos escribir, identificando álgebras isomorfas,

$$L(n) = \prod_{M \in \mathcal{S}(L(n))} L(n)/M.$$

Sean $\mathcal{S}_1 = \{M \in \mathcal{S}(L(n)) \colon |L(n)/M| = 2\}$ y $\mathcal{S}_2 = \{M \in \mathcal{S}(L(n)) \colon |L(n)/M| = 3\}$, entonces $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2\}$ es una partición de $\mathcal{S}(L(n))$, y teniendo en cuenta el Teorema 1.1 podemos escribir:

(1) $\quad L(n) = B^{|\mathcal{S}_1|} \times T^{|\mathcal{S}_2|}$.

Sean

$H_1 = \{h \in Hom(L(n), \mathcal{T}) \colon h(L(n)) = B\}$ y $H_2 = Epi(L(n), \mathcal{T})$,

entonces se verifican: (2) $\quad |\mathcal{S}_1| = |H_1|$, $|\mathcal{S}_2| = |H_2|$.

Considerando los conjuntos

$F_1 = \{f \in T^G \colon [f(G)] = B\}$ y $F_2 = \{f \in T^G \colon [f(G)] = T\}$,

donde $[f(G)]$ es la $S\Delta I_3$-subálgebra generada por $f(G)$, podemos afirmar que valen:

(3) $\quad |H_1| = |F_1|$, $|H_2| = |F_2|$.

Por otra parte, es fácil ver que valen

$$F_1 = B^G - \{f_0\}, f_0 \in B^G,\ f_0(g) = 1 \text{ para todo } g \in G, \quad \text{y} \quad F_2 = T^G - B^G,$$

de donde tenemos:

(4) $|F_1| = 2^n - 1,\ |F_2| = 3^n - 2^n$.

De (1) a (4) resulta:

Teorema 2.1 Si n es un entero positivo entonces se verifican:

(*i*) $L(n) = B^{(2^n - 1)} \times T^{(3^n - 2^n)}$,

(*ii*) $|L(n)| = 2^{(2^n - 1)} \cdot 3^{(3^n - 2^n)}$.

Referencias.

[1] G. Birkhoff, *Lattice theory*, 3^{rd} ed., Amer. Math. Soc. Coll. Pub., 25, Providence(1967).

[2] A. V. Figallo, *ΔI_3-Algebras*, Rep. on Math. Logic., 24(1990), 3 - 16.

[3] A. V. Figallo y J. Tolosa, *I_3-Algebras with an aditional operation*, Actas del Primer Congreso Dr. A. R. Monteiro, Instituto de Matemática, U.N. del Sur, 1992, 123 - 142.

[4] L. Iturrioz y O. Rueda, *Algèbres implicatives trivalentes de Lukasiewicz libres*, Discrete Math., 18 (1977), 35 - 44.

[5] G. C. Moisil, *Notes sur les logiques non-chrysippiènncs*, Ann. Sci. Univ. Jassy, 27(1941), 86 - 98.

[6] A. Monteiro, *Sur la définition des algèbres de Lukasiewicz trivalentes*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys., R. P. Roum. 7(55), 1 - 2 (1963), 3 - 12.

[7] A.Monteiro, *Algebras implicativas trivalentes de Lukasiewicz*, Curso dictado en la U.N. del Sur, 1968, Bahía Blanca, Argentina.

[8] A. Monteiro, *Sur les algèbres de Heyting Simetriques*, Port. Math., 39, 1 - 4(1980), 1 - 237.