SOBRE ALGUNOS OPERADORES NO SIMÉTRICOS.

A. L. Barrenechea - Carlos C. Peña.

UNCentro de la provincia de Buenos Aires.
FCEx. Dto. de Matemática,
Tandil, República Argentina,
1995.

Resumen.

1.- Se prueba que los operadores generalizados no simétricos, introducidos por J. S. Lowndes [*L*] en 1985, se realizan como operadores de no convolución con un núcleo Bessel - Clifford.

2.- Se discuten relaciones entre estos últimos con operadores fraccionarios corrientes y se deriva una fórmula de inversión siguiendo una técnica de Bakievich [*B*].

Introducción.

Entre otras aplicaciones, haciendo uso de operadores generalizados no simétricos, J. S. Lowndes [*L*] desarrolló una técnica que permite la resolución explícita, entre otras, de ecuaciones generalizadas tipo la 2 - axial simétrica de Helmholtz:

$$[1] \qquad \mathrm{H}^k_{\eta,\alpha}\, u \equiv u_{xx} + u_{yy} + \tfrac{2\alpha}{x} u_x + \tfrac{2\eta}{y} u_y + k^2 u = 0,$$

k, η, α, constantes.

Esta técnica consiste, básicamente, en realizar la ec. [1] como la transformada de la ecuación generalizada biaxial del potencial simétrico:

$$[2] \qquad u_{xx} + u_{yy} + \tfrac{2\alpha}{x} u_x + \tfrac{2\eta}{y} u_y + k^2 u = 0, \quad (\eta, \alpha \ \textit{positivos})$$

via el operador $\mathrm{I}_k(\eta, \alpha)$ definido mediante [3] :

$$\mathrm{I}_k(\eta, \alpha)\, f(x) = \left(\tfrac{k}{2}\right)^{1-\alpha} x^{-\alpha-\eta} \int_0^x u^{\eta} \left(\frac{x-u}{x}\right)^{\frac{\alpha-1}{2}} J_{\alpha-1}\left(k\sqrt{x^2 - xu}\right) f(u)du.$$

Entonces, a partir de un sistema completo de soluciones de la ec. [2], se puede hallar un sistema completo de soluciones de la ec. [1].

Siguiendo la notación de Lowndes, el operador adjunto del definido en [3] está dado mediante la relación [4] :

$$\mathrm{K}_k(\eta,\alpha)\, f(x) = \left(\tfrac{k}{2}\right)^{1-\alpha} \mathrm{x}^{\eta} \int_0^x u^{-\alpha-\eta} \left(\frac{x-u}{x}\right)^{\frac{\alpha-1}{2}} J_{\alpha-1}\left(k\sqrt{xu-x^2}\right) f(u)du$$

como asímismo, los operadores $\mathrm{I}_{ik}(\eta,\alpha)$ *y* $\mathrm{K}_{ik}(\eta,\alpha)$, que siguen de [3] y [4], reemplazando $\mathrm{J}_{\alpha-1}$ por $\mathrm{I}_{\alpha-1}$, esto es, la función modificada de Bessel de 1era. especie.Para valores no positivos de α, *se* define $[L]$:

$$[5] \qquad \mathrm{I}_p(\eta,\alpha)\; g(x) = x^{n-\eta}\; I_p(0,\alpha+\eta)\; \mathrm{D}_x^n\,(x^{\eta} g(x))$$

donde n es un entero positivo tal que $\alpha + n \in (0,1]$, p = k o p = ik, k no negativo. En particular, haciendo k $\to 0^+$ en [3] y [4] se obtienen los operadores de Erdélyi - Kober $[E]$, $[K]$,

$$[6] \qquad \begin{cases} I_0(\eta,\alpha) f(x) = I_x^{\eta,\alpha} f(x) = x^{-\alpha-\eta} I_{0+}^{\alpha}(x^{\eta} f(x)) \\ K_0(\eta,\alpha) f(x) = K_x^{\eta,\alpha} f(x) = x^{\eta} K_x^{\alpha}(x^{-\alpha-\eta} f(x)) \end{cases}$$

donde I_{0+}^{α}, K_x^{α} son los operadores fraccionarios de Riemann - Liouville y de Weyl dados mediante las expresiones:

$$[7] \qquad \begin{cases} I_{0+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \\ K_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt. \end{cases}$$

Nuestro tratamiento será formal, asumiendo *a priori* que expresiones como [3] y [4] están definidas.

En particular, se puede verificar la relación

$$[8] \qquad \mathrm{I}_k(\eta,\alpha) = \frac{x^{\lambda}}{(\eta+\lambda+1)_{\alpha}}\; \bar{\mathrm{J}}_{\alpha+\lambda+1}(kx)$$

donde, como es usual, $(a)_b = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)}$ es el símbolo de Legendre y, además

$$[9] \qquad \bar{\mathrm{J}}_{\nu}(z) = \Gamma(\nu+1)\left(\tfrac{z}{2}\right)^{-\nu} J_{\nu}(z)$$

es la función de Bessel - Clifford.

En el §1 se introducen los operadores de no convolución con núcleos de Bessel - Clifford y se enuncian resultados de inversión de M. I. Bakievich. En el §2 se hace la reducción de los operadores $\mathrm{I}_k(\eta,\alpha)$ a operadores de no convolución con núcleos de B -C, para atender en el §3 a la invertibilidad de estos, generalizando resultados de Lowndes.

§1. Sobre operadores de no convolución.

[1.1] Siguiendo la nomenclatura corriente, indicaremos la clase de operadores de no convolución con núcleo de Bessel - Clifford mediante

[10] $\quad \bar{J}^{+}_{\alpha,k}$ f(x) $=\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\, \bar{J}_{\alpha-1}(k\sqrt{xt-t^2})\, f(t)\, dt,$

[11] $\quad \bar{I}^{-}_{\alpha,k}$ f(x) $=\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\, \bar{\mathrm{I}}_{\alpha-1}(k\sqrt{x^2-tx})\, f(t)\, dt,$

donde $\bar{I}_\nu(z) = \bar{J}_\nu(-iz)$, z $\in$ C. Asímismo, se denota $\bar{I}^{+}_{\alpha,k}$, $\bar{J}^{-}_{\alpha,k}$ a los operadores que siguen de [10] y [11] intercambiando los símbolos $\bar{J}$ e $\bar{I}$ respectivamente.

[1.2] Si α es positivo, f $\in$ $L^p(0,b)$, p $\geq$ 1,entonces los operadores anteriores están definidos, son acotados y sobreyectivos entre los espacios $L^p(0,b)$ e I^{α}_{0+} ($L^p(0,b)$) (sobre este punto, v. Samko [S]).

Por otra parte, para β positivo es válida la relación

[12] $\quad I^{\beta}_{0+}\, \bar{J}^{+}_{\alpha,k}$ f(x) $= \bar{J}^{+}_{\alpha+\beta,k}$ f(x).

[1.3] De la relación anterior, si $\alpha \in (0,1)$, haciendo β = 1-α y teniendo presente que $(I^{\alpha}_{0+})^{-1}$ = D$_x$ $I^{1-\alpha}_{0+}$ se tiene la representación

[13] $\quad \bar{J}^{+}_{\alpha,k}$ f(x) $=I^{\alpha-1}_{0+}\, \bar{J}^{+}_{1,k}$ f(x).

Por esta última identidad, el problema de la invertibilidad de $\bar{J}^{+}_{\alpha,k}$ atañe propiamente al de la invertibilidad de $\bar{J}^{+}_{1,k}$.

[1.4] *Teorema de Bakievich.*

Sea $F(x) \in AC[a,b]$. La ecuación:

[14] $\quad D_x\, \bar{J}^{+}_{1,k}\, f(x) = F(x)$

admite una única solución de la forma:

[15] $\quad f(x) = x^{-1}\, \bar{I}^{-}_{1,k}\, D_x(xF(x)).$

[1.5] *Corolario (Bakievich).*

Si $\alpha \in (0,1)$, $g \in I^{\alpha}_{0+}(L^1(0,b))$ y $g(0) = 0$, entonces

$$[16]\qquad \left(\bar{J}^{+}_{\alpha,k}\right)^{-1} g(x) = x^{-1} \int_0^x I_0\left(k\sqrt{x^2-xt}\right) d\left[t\ I_{0+}^{-\alpha}\ g(t)\right]$$

$$= x^{-1}\ \bar{I}^{-}_{1-\alpha,k}\left[x\tfrac{dg}{dx} + (1\text{-}\alpha)\ g(x)\right]$$

§2. Sobre operadores generalizados no simétricos.

[2.1] Sean k, η, α constantes positivas. Dados x positivo, u $\in$ (0,x) y una función medible C - valuada f = f(x) escribiremos

$$[17]\qquad X_{k,\alpha}(u,x) = \left(\tfrac{k}{2}\right)^{1-\alpha} \left(\tfrac{x-u}{x}\right)^{\frac{\alpha-1}{2}} J_{\alpha-1}\left(k\sqrt{x^2-xu}\right),$$

$$[18]\qquad \Xi_{k,\alpha}\ \mathrm{f(x)} = \int_0^x X_{k,\alpha}(u,x)\ \mathrm{f(u)\ du}.$$

Entonces:

(a) $X_{k,\alpha}(u,x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\ (\mathrm{x}\text{-}\mathrm{u})^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(k\sqrt{x^2-xu}\right)$.

(b) $\mathrm{I}_k(\eta,\alpha)\ \mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^{-\alpha-\eta}\ \Xi_{k,\alpha}\left[u^\eta\ \mathrm{f(u)}\right](x)$.

(c) $\Xi_{k,\alpha}\ \mathrm{f(x)} \sim I_{0+}^{\alpha}\ f(x) \quad (x \to 0^+)$.

Demostración : La prueba es enteramente formal, razón por la cual la omitimos.□

[2.2] El operador $\Xi_{k,\alpha} : \mathrm{L}^1_{loc}(\mathbf{R}^+) \longrightarrow \mathrm{L}^1_{loc}(\mathbf{R}^+)$ está bien definido.

Demostración:

Por [2.1] (a), para u $\in (0,x)$, tenemos :

$$|\Xi_{k,\alpha}(u,x)| \le \frac{(x-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!(\alpha)_r}\left(\frac{x}{4}k^2\right)^r (x-u)^r$$

$$\le \frac{(x-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp\left(\frac{(kx)^2}{4\alpha}\right).$$

Sea f $\in \mathrm{L}^1_{loc}(\mathbf{R}^+)$ e y un número real fijo. Entonces:

$$\int_0^y \int_0^x |\Xi_{k,\alpha}(u,x)\ f(u)|\ du\ dx \leq$$

$$\leq \int_0^y \left[\int_0^x \frac{(x-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f(u)| \exp\left(\frac{(kx)^2}{4\alpha}\right) du \right] dx$$

$$= \int_0^y |f(u)| \int_u^y \frac{(x-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp\left(\frac{(kx)^2}{4\alpha}\right) dx\ du$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \exp\left(\frac{(ky)^2}{4\alpha}\right) \int_0^y |f(u)|\,(y-u)^\alpha\ du$$

$$\leq \frac{y^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \exp\left(\frac{(ky)^2}{4\alpha}\right) \int_0^y |f(u)|\ du.$$

y esta última expresión es finita. Por lo tanto, $\Xi_{k,\alpha} f \in \mathrm{L}^1_{loc}(\mathbf{R}^+)$ □

[2.3] De este último resultado, insistimos en señalar, que el operador $\Xi_{k,\alpha}$ está definido sobre funciones **C** - valuadas de variable positiva sujetas a condiciones bastante generales. No obstante, cuando sea necesario, vamos a asumir que las funciones sobre las que opere el mismo son lo suficientemente suaves como para hacer viables nuestros argumentos.

[2.4] Los operadores $\Xi_{k,\alpha}$ son operadores de no convolución con núcleo Bessel - Clifford. En particular, tenemos la realización :

[19] $\quad \Xi_{k,\alpha} = \bar{\mathrm{J}}^-_{\alpha,k}$

§3. Sobre el problema de invertibilidad.

[3.1] Sea $\alpha \in (0,1)$, $b \in (0,+\infty)$, $p \geq 1$. Se considera una función medible h tal que $x^{-1}h(x) \in \mathrm{L}^p(0,b)$ y $h(x) \in \mathrm{I}^{1-\alpha}_{0+}[\mathrm{L}^p(0,b)]$. Entonces, si p es mayor que 1, $\alpha \in (0,\frac{1}{p'})$, o en su defecto, $\bar{\mathrm{J}}^+_{1-\alpha}(x^{-1}h(x)) \to 0$, resulta

[20] $\quad (\ \bar{\mathrm{I}}^-_{\alpha,k}\ )^{-1}h(x) = x^{1-\alpha}\ \mathrm{D}_x \left[x^\alpha\ \bar{\mathrm{J}}^+_{1-\alpha}(x^{-1}h(x))\right].$

Demostración :

Reemplazando α por 1-α en [16] tenemos :

[21] $$\begin{cases} (\bar{\mathrm{J}}^+_{1-\alpha,k})^{-1}g(x) = x^{-1}\ \bar{\mathrm{I}}^-_{\alpha,k}\ \varphi(x) \\ \varphi(x) = x^{1-\alpha}\ \mathrm{D}_x\,(x^\alpha\ g(x)). \end{cases}$$

i.e. de la ecuación

$$[22] \qquad \bar{I}^{-}_{\alpha,k}\, \varphi(x) = h(x)$$

esto es:

$$[23] \qquad x\, (\bar{J}^{+}_{1-\alpha,k})^{-1} g(x) = h(x),$$

se tendría entonces

$$[24] \qquad g(x) = \bar{J}^{+}_{1-\alpha,k}(\, x^{-1}\, h(x))$$

en la medida que $g \in I^{1-\alpha}_{0+}\,[L^1(0,b)]$, $g(0)=0$. Notemos que $\mathrm{Im}(\bar{J}^{+}_{1-\alpha,k}) \subset I^{1-\alpha}_{0+}\,[L^p(0,b)]$ y $L^p(0,b) \subset L^1(0,b)$. Por otra parte tenemos

$$g(x) = \Xi_{1-\alpha,k}(x^{-1}h(x)) \sim I^{1-\alpha}_{0+}(x^{-1}h(x))$$

y, de las hipótesis, sigue la afirmación.□

[3.2] Sea $\alpha \in (0,1)$; k, $b \in (0,+\infty)$, $p \geq 1$, $\eta \in \mathbf{R}$. Dada una función medible g tal que $x^{\alpha+\eta-1}g(x) \in L^p(0,b)$ y $x^{\alpha+\eta}\, g(x) \in I^{1-\alpha}_{0+}\,[L^p(0,b)]$ entonces, si p es mayor que 1, $\alpha \in (0, \frac{1}{p'})$ *o bien* si $\bar{J}^{+}_{1-\alpha}\,(x^{\alpha+\eta-1}g(x)) \to 0$, resulta:

$$[25] \qquad [I_k(\eta,\alpha)]^{-1} g(x) = x^{1-\alpha-\eta}\, D_x \left[x^{\alpha}\, \bar{I}^{+}_{1-\alpha,k}\,(x^{\alpha+\eta-1}g(x))\right].$$

Demostración:

Consideremos la ecuación

$$[26] \qquad I_k(\eta,\alpha) f(x) = g(x).$$

Por [2.1](b) y [19] obtenemos

$$[27] \qquad \bar{J}^{-}_{\alpha,k}(u^{\eta} f(u)) = x^{\alpha+\eta} g(x).$$

Teniendo presente las fórmulas

$$[28] \qquad \bar{I}^{+}_{\alpha,k} = \bar{J}^{+}_{\alpha,ik} \qquad \bar{J}^{-}_{\alpha,k} = \bar{I}^{-}_{\alpha,ik},$$

podemos escribir la relación [20] en la forma

$$[29] \qquad x^{\eta}\, f(x) = (\bar{I}^{-}_{\alpha,ik})^{-1}\, (x^{\alpha+\eta} g(x))$$

y ahora basta aplicar [3.1] y las identidades anteriores.□

[3.3] En particular, usando [25], tenemos

$$[30] \qquad \begin{cases} [I_k(\eta,\alpha)]^{-1} = x^{1-\eta}\, D_x \int_0^x u^{\eta-1} I_0(k\sqrt{ux-x^2})\, g(u)\, du \\ [I_{ik}(\eta,\alpha)]^{-1} = x^{1-\eta} D_x \int_0^x u^{\eta-1} J_0(k\sqrt{ux-x^2})\, g(u)\, du \end{cases}$$

Estas últimas identidades, válidas aún cuando $D_x(x^\eta\ g(x))$ es integrable en el orígen y x^η g(x) $\rightarrow$ 0 (x$\rightarrow$ 0^+) coinciden por las obtenidas por Lowndes [*L*] mediante transformadas de Laplace, y asimismo, haciendo η igual a cero resultan los operadores obtenidos por Vekua [V].

Bibliografía.

[B] Bakievich, M. I.

Singular Tricomi problems for equation: $\eta^\alpha\ u_{\xi\xi}$ - $u_{\eta\eta}$ -$\mu^2\eta^\alpha\ u = 0$.

Volzh. Mat. Sb.Kuibyshev: Ped. Inst. no. 1, 42 - 52 (1963).

[E] Erdélyi, A. *On some fract transfomrs.*

Rend. Sem. Mat. Univ. e Politecn di Torino, 10, 217 - 234 (1950).

[K] Kober, H.. *On fract. integrals and derivatives.*

Quart. J. Math.. Oxford ser., 11, no. 43, 193, - 211 (1940).

[L] Lowndes, J. S. *On two new operators of fractional integration.*

Fract. Calculus, eds. A. C. McBride, G. F. Roach. Boston: Pitman Adv. Publ. Program, Res. Notes Math., 138, 87 -98 (1985).

[S] Samko, S. G.. *Solution of generalized Abel equation by means of an equation with Cauchy kernel.*

Dokl Akad. Nauk. SSSR, 176, no. 5, 1019 - 1022 (Transl. in Soviet Math. Dokl., 6, 1259 - 1262), (1967).

[V] Vekua, I. N..*New methods for solving elliptic equations.*

North Holland (1967).