ACTAS DEL XIV CONGRESO
DR. ANTONIO A. R. MONTEIRO (2017)
2019, Páginas 3–19

ÁLGEBRAS MTL

JOSÉ L. CASTIGLIONI

RESUMEN. A finales de la década de los 90 del siglo pasado, P. Hájek introduce una nueva lógica, que denomina *basic (fuzzy) logic* (BL); asimismo introduce una semántica algebraica para esta lógica, la variedad de las álgebras BL. Poco tiempo después, Cignoli, Esteva, Godo y Torrens muestran que BL es la lógica de todas las t-normas continuas y sus residuos.

Si bien la condición de ser continua para una t-norma es suficiente para la existencia de un residuo, esta condición no es necesaria. Una condición necesaria y suficiente es la continuidad a izquierda. Resulta por tanto natural preguntarse por la lógica de las t-normas continuas a izquierda. Esteva y Godo proponen una nueva lógica: *monoidal t-norm based logic* (MTL), la cual generaliza en este sentido a BL, y Jenei y Montagna prueban que dicha lógica es en efecto la lógica de las t-normas continuas a izquierda y sus residuos. La variedad de las álgebras MTL es una semántica algebraica equivalente (en el sentido de Blok y Pigozzi) para la lógica MTL.

Esta son las notas de un curso breve (4 horas de duración) dictado por el autor en el XIV Congreso Dr. Antonio Monteiro. Las mismas no pretenden ninguna originalidad, sino que ofrecen una introducción razonablemente autocontenida al estudio de las álgebras MTL. Sólo se presume por parte del lector un conocimiento básico de algunos resultados de álgebra universal.

INTRODUCCIÓN

El estudio formal de la lógica borrosa (*mathematical fuzzy logic*) tuvo un punto de inflexión durante la última década del siglo XX, en la que tomó su forma actual como el estudio sistemático de clases particulares de lógicas multivaluadas, con los trabajos de Baaz, Cignoli, Esteva, Godo, Gotwald, Hájek, Montagna, Mundici y Novak, entre otros. Motivados por la teoría de conjuntos borrosos (*fuzzy sets*), los primeros sistemas estudiados fueron aquellos que admiten una semántica basada en t-normas continuas particulares: lógicas multivaluadas de Łukasiewicz, producto y Gödel. El primer intento de dar una sistematización abarcadora para el estudio de estas lógicas se debe a Hájek, a fines de la década de 1990. A fin de proveer una base común para los tres sistemas antes mencionados, en [4] P. Hájek propone un sistema al que denomina *basic fuzzy logic*, o más sucintamente, BL, el cual resulta ser completo con respecto a la semántica de todas las t-normas continuas.

Si se remueve la condición de divisibilidad en BL, surge el sistema lógico MTL, el cual es completo con respecto a la semántica de todas las t-normas continuas a izquierda [2]. Llamaremos $\underline{\text{MTL}}$ a la variedad en la signatura $\mathscr{L} = \{\cdot, \to, \wedge, \vee, 0, 1\}$ generada por todas las t-normas continuas a izquierda, con sus respectivos residuos. Un elemento de esta variedad es lo que se denomina un álgebra MTL (siguiendo la costumbre de denominar a las matrices algebraicas para una lógica con el nombre de la lógica). Estas álgebras constituyen los objetos centrales de estudio de este curso, en el cual nos ocuparemos mayormente de los aspectos algebraicos, a pesar de que la motivación para su estudio (y para ofrecer este curso en este encuentro) es esencialmente la relación de estas estructuras con una clase importante de lógicas.

1. MOTIVACIÓN Y EJEMPLOS

A continuación revisaremos sucintamente algunos de los aspectos básicos mencionados en la intodución, acerca del origen lógico por el interés en las álgebras MTL.

Intuitivamente se puede pensar que lo que carcteriza a una "lógica borrosa" respecto de otros sistemas lógicos es lo siguiente:

> *... una lógica es borrosa si es completa respecto de una semántica basada en álgebras totalmente ordenadas.*[1]

En esta sección daremos una familia muy general de este tipo de álgebras totalmente ordenadas, las t-normas continuas a izquierda, e introduciremos la variedad que ellas generan.

1.1. Normas triangulares y sus propiedades.

Comencemos refrescando algunas definiciones básicas de álgebra.

Definición 1. *Un **monoide** es un álgebra $(M,*,e)$ de tipo (2,0) tal que se satisfacen las siguientes identidades:*
(M1) $x*(y*z) = (x*y)*z$ *(asociatividad);*
(M2) $x*e = x = e*x$ *(existencia de elemento neutro).*
*Un monoide se dice **conmutativo** si además se cumple que*
(C) $x*y = y*x$.

Dado que en este curso solo nos interesarán los monoides conmutativos, a partir de ahora simplemente utilizaremos la palabra *monoide* para indicar monoide conmutativo.

Sea $M = (M,*,e)$ un monoide. Para cada $x \in M$ y $n \in \mathbb{N}$ definimos recursivamente x^n por:

$$\begin{cases} x^0 = e, \\ x^{n+1} = x * x^n. \end{cases}$$

Un elemento $x \in M$ se dice **idempotente** si $x^2 = x$, y se dice **absorbente** si para todo $y \in M$, $x*y = x$.

Dado que las estructuras con las que vamos a trabajar son monoides dotados de un orden, introduciremos a continuación la siguiente clase de estructuras.

Definición 2. *Un **monoide ordenado** es una estructura $(M,*,e,\leq)$ tal que*

- $(M,*,e)$ *es un monoide,*
- $(M,\leq)$ *es un conjunto ordenado, y*
- *para todo x, y, z en M, si $x \leq y$ se tiene que $x*z \leq y*z$.*

Diremos que un monoide ordenado está **negativamente ordenado** si la identidad, e, es el elemento máximo. Observar que en todo monoide negativamente ordenado M, se tiene que para todo x e y en M, $x*y \leq x$. Un monoide negativamente ordenado se dice **arquimediano** si para todo par de elementos x e y, distintos de e, existe un entero positivo n tal que $x^n \leq y$.

Concentrémonos ahora en una clase particular de monoides negativamente ordenados.

Definición 3. *Escribamos $[0,1]$ para indicar el intervalo real con su orden usual. Una **norma triangular**, o **t-norma** por brevedad, es una operación binaria $*$, sobre $[0,1]$, que hace de $([0,1],*,1,\leq)$ un monoide negativamente ordenado. Llamaremos asimismo t-norma a la estructura $([0,1],*,1,\leq)$, asociada a $*$.*

[1] Extraído de [2]. Traducción del autor.

Observar que en cualquier t-norma el elemento 0 es absorbente, ya que $0 \leq 0 * x \leq 0$, para todo $x \in [0,1]$.

Veamos a continuación varios ejemplos clásicos de t-normas.

Ejemplo 1. *Algunos ejemplos clásicos de t-normas.*

1. *t-norma de Gödel:* $x *_G y := \text{mín}\{x,y\}$*;*
2. *t-norma de producto:* $x *_P y := x \cdot y$*, el producto usual como números reales;*
3. *t-norma de Łukasiewicz:* $x *_L y := \text{máx}\{x+y-1, 0\}$*;*
4. *t-norma de NM (mínimo nilpotente):* $x *_{NM} y := \begin{cases} 0, & \textit{si } x \leq 1-y, \\ \text{mín}\{x,y\}, & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$

Una función $f : [0,1]^n \to [0,1]$ se dice **inferiormente continua** en $\mathbf{x} \in [0,1]^n$ si para toda sucesión creciente (respecto del orden producto[2]) $\{\mathbf{x}_n\}$ que converge a $\mathbf{x}$, $\lim_{n\to\infty} f(\mathbf{x}_n) = f(\mathbf{x})$. Como en el caso en que $n = 1$ las funciones inferiormente continuas suelen denominarse **continuas a izquierda**, utilizaremos este último término para referirnos a ellas, aun cuando se trate de funciones de más de una variable.

Observemos que una t-norma (vista como función real en dos variables) es continua (a izquierda) si y solo si para cada $x \in [0,1]$ la función real $f_x : [0,1] \to [0,1]$, dada por $f_x(y) := x * y$, lo es. Además, todas las f_x recién definidas son monótonas. Se puede comprobar, de manera rutinaria, que todas las t-normas del Ejemplo 1 son continuas a izquierda; en particular, las tres primeras son directamente continuas. Existen además t-normas no continuas (ni siquiera a izquierda), como podemos ver en el siguiente ejemplo; sin embargo, ellas no resultarán de interés en este curso.

Ejemplo 2. *Consideremos la siguiente función real sobre* $[0,1]$*:*

$$x * y := \begin{cases} 0, & \textit{si } x, y \neq 1, \\ x, & \textit{si } y = 1, \\ y, & \textit{si } x = 1. \end{cases}$$

Claramente, para cada $x \in (0,1)$*, la función* $y \mapsto x * y$ *es discontinua a izquierda en 1, y en consecuencia, la función arriba definida lo es. Para ver que dicha función es en efecto una t-norma, debemos verificar que es asociativa, que el 1 es el neutro, y que es monótona en cada coordenada.*

Claramente, por construcción, tiene al 1 como neutro y es monótona en cada coordenada. Veamos que además es asociativa, haciendo un análisis por casos para $x, y, z \in [0,1]$*:*

- *si* $x, y, z \neq 1$*, entonces* $x * (y * z) = 0 = (x * y) * z$*;*
- *si* $x = 1$*, entonces* $1 * (y * z) = y * z = (1 * y) * z$*;*
- *si* $y = 1$*, entonces* $x * (1 * z) = x * z = (x * 1) * z$*;*
- *si* $z = 1$*, entonces* $x * (y * 1) = x * y = (x * y) * 1$*.*

Además, la lista anterior de casos es exhaustiva. Con lo que tenemos un ***ejemplo de una t-norma no continua a izquierda****.*

Hasta ahora solo hemos considerado álgebras en el lenguaje $\{*, 1\}$ de tipo $(2,0)$. Agreguemos una nueva operación binaria $\Rightarrow$, cuando sea posible.

[2] Sean $(P, \leq_P)$ y $(Q, \leq_Q)$ dos conjuntos parcialmente ordenados. Definamos sobre el universo $P \times Q$ una relación binaria $\leq$ por $(p,q) \leq (p',q')$ si y solo si $p \leq_P p'$ y $q \leq_Q q'$, para $p, p' \in P$ y $q, q' \in Q$. Esta relación es de orden y se denomina el **orden producto** en $P \times Q$.

Definición 4. *Sea $(M, *, 1, \leq)$ un monoide negativamente ordenado*[3]*. Una operación binaria $\Rightarrow$ sobre M tal que*

$$\text{para todo } x, y, z \in M, \quad x * y \leq z \text{ si y solo si } x \leq y \Rightarrow z \tag{1}$$

se denomina un ***residuo*** *de $*$.*

Proposición 1. *Sea $(M, *, 1, \leq)$ un monoide (negativamente) ordenado. Si $*$ posee un residuo, este es único.*

Demostración. Veamos que para todo $y, z \in M$, $y \Rightarrow z = \text{máx}\{x \in M \mid x * y \leq z\}$, siempre que el mencionado residuo exista. De allí se desprenderá la unicidad.

Supongamos que $(y \Rightarrow z)$ existe. Veamos que $(y \Rightarrow z) \in \{x \in M \mid x * y \leq z\}$. En efecto, $(y \Rightarrow z) \leq (y \Rightarrow z)$ se satisface por reflexividad y, por (1), se sigue que $y * (y \Rightarrow z) \leq z$, de donde concluimos la pertenencia.

Por otra parte, supongamos que $u * y \leq z$; es decir que $u \in \{x \in M \mid x * y \leq z\}$. Entonces, por (1), se tiene que $u \leq (y \Rightarrow z)$, de donde se concluye que $(y \Rightarrow z)$ es el máximo de dicho conjunto. $\square$

En los Ejemplos 1 y 2 hemos mencionado varias t-normas (que son ejemplos particulares de monoides negativamente ordenados). Surgen naturalmente las siguientes preguntas: ¿Tienen estas t-normas residuo? ¿Tiene toda t-norma residuo? ¿Hay alguna forma de caracterizar a las t-normas que tengan residuo?

Comencemos respondiendo la primera pregunta para las t-normas del Ejemplo 1.

Ejemplo 3. *Las siguientes operaciones binarias son los residuos de las correspondientes t-normas del Ejemplo 1:*

1. *Implicación de Gödel:* $x \Rightarrow_G y = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq y \\ y, & \text{si } y < x. \end{cases}$
2. *Implicación Producto:* $x \Rightarrow_P y = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq y \\ \frac{y}{x}, & \text{si } y < x. \end{cases}$
3. *Implicación de Łukasiewicz:* $x \Rightarrow_L y = \text{mín}\{1 - x + y, 1\}$, *donde la suma y la resta son las usuales de $\mathbb{R}$.*
4. *Implicación NM:* $x \Rightarrow_{NM} y = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq y \\ \text{máx}\{1 - x, y\}, & \text{si } y < x. \end{cases}$

Ejercicio. *Verificar que las operaciones definidas en el Ejemplo anterior son, en efecto, los residuos de las correspondientes t-normas del Ejemplo 1.*

¿Qué sucede con la t-norma del Ejemplo 2? Tomemos $x \neq 0, 1$ y supongamos que existe $x \Rightarrow 0$. Entonces, el conjunto $\{u \in [0,1] \mid u * x \leq 0\}$ tiene máximo $x \Rightarrow 0$. Pero $\{u \in [0,1] \mid u * x \leq 0\} = \{u \in [0,1] \mid u * x = 0\} = [0,1)$, el cual, como subconjunto ordenado de $\mathbb{R}$, no tiene máximo. Esto responde negativamente la segunda pregunta que nos planteamos antes del ejemplo anterior, y sugiere una posible respuesta a la tercera, que viene dada por el siguiente teorema.

Teorema 2. *Una t-norma tiene residuo si y solo si es continua a izquierda.*

[3] En esta definición, el hecho de que el monoide sea **negativamente** ordenado no juega ningún papel especial, pudiendo generalizarse la misma sin problema a monoides ordenados.

Demostración. Supongamos que $*$ es una t-norma continua a izquierda. Fijemos $x \in [0,1]$. La función $f_x : [0,1] \to [0,1]$, inducida por la t-norma, es continua a izquierda. Para cada $y \in [0,1]$, consideremos el conjunto $C_y^x := \{u \in [0,1] \mid f_x(u) \leq y\}$. Por un lado, tenemos que $C_y^x := \{u \in [0,1] \mid u * x \leq y\}$. Por el otro, que $C_y^x := f_x^{-1}([0,y])$. Por la monotonía y la continuidad a izquierda de f_x, la imagen inversa de un intervalo de la forma $[0,y]$ debe ser a su vez otro intervalo de esta forma; es decir, de la forma $[0,y_x]$, el cual tiene máximo y_x. Dicho máximo y_x es tal que $f_x(u) \leq y$ si y solo si $u \leq y_x$. Tomando la operación binaria unívocamente definida por $x \Rightarrow y := y_x$, tenemos el residuo de $*$.

Recíprocamente, utilizando la notación anterior, si la t-norma tiene residuo, entonces C_y^x tiene máximo para todo x e y en $[0,1]$. Como $C_y^x := f_x^{-1}([0,y])$ y f_x es monótona, C_y^x es un intervalo que contiene a 0. Como tiene máximo, dicho intervalo es cerrado. En consecuencia, para todo $x \in [0,1]$, la función $f_x : [0,1] \to [0,1]$ es continua a izquierda. $\square$

Como $[0,1]$, visto como conjunto ordenado, es una cadena, en particular es un retículo. En consecuencia, podemos ver a una t-norma $([0,1],*,1,\leq)$ como un monoide negativamente ordenado o como un álgebra (en el sentido del álgebra universal[4]) de tipo $(2,2,2,0)$, $([0,1],*,\vee,\wedge,1)$, con las operaciones **supremo** e **ínfimo** definidas por $x \vee y := \text{máx}\{x,y\}$ y $x \wedge y := \text{mín}\{x,y\}$, respectivamente. Notar que el orden queda completamente definido por estas operaciones: $x \leq y$ si y solo si $x \vee y = y$ si y solo si $x \wedge y = x$.

Si además consideramos aquellas t-normas con residuo, tenemos álgebras de tipo (2,2,2, 2,0), $([0,1],*,\Rightarrow,\vee,\wedge,1)$. Por cuestiones de conveniencia, también pondremos en la signatura de estas álgebras a la constante 0. Denominaremos t-álgebras a los elementos de la clase de estructuras de tipo (2,2,2,2,0,0) resultante, a la cual escribiremos TA.

1.2. Lógicas de t-normas monoidales. Estamos ahora en condiciones de conectar lo anteriormente dicho con algún tipo de lógica. En lo que resta de esta sección, la mayor parte de los resultados se darán sin prueba, dado que, como hemos dicho, el objetivo de este curso es el estudio de una clase particular de álgebras; solo que para motivar el interés en esta clase de álgebras es necesario mostrar su conexión con la lógica proposicional.

Sea $\mathscr{L}$ el lenguaje $\{*,\Rightarrow,\wedge,\vee,0,1\}$, y escribamos $\mathfrak{Fml}$ para indicar el conjunto de fórmulas en el lenguaje $\mathscr{L}$, las que se forman de forma recursiva, del modo usual. Llamaremos a $*$ la conjunción fuerte, a $\Rightarrow$ la implicación, a $\vee$ y $\wedge$ la disyunción y conjunción débiles, y a las constantes 0 y 1, falsedad y verdad, respectivamente. Sea $A \in$ TA. Una ***A*-evaluación**[5] es un $\mathscr{L}$-homomorfismo $v : \mathfrak{Fml} \to A$. Una A-evaluación v se denomina un ***A*-modelo** de un conjunto Γ de fórmulas si para toda $\gamma \in \Gamma$, $v(\gamma) = 1$.

Definición 5. *Sea K una subclase de la clase de t-álgebras. Asociamos a K una relación binaria $\models_K$ entre los conjuntos de fórmulas y las fórmulas, por*

$$\Gamma \models_K \varphi \text{ si y solo si para todo } A \in K \text{ y todo } A\text{-modelo de } \Gamma,\ v, \text{ se tiene que } v(\varphi) = 1.$$

*En particular, si $\emptyset \models_K \varphi$, denominaremos a φ una **K-tautología**.*

[4] Ver por ejemplo el libro de Burris y Sankappanavar [1].

[5] Aquí estamos identificando el conjunto de fórmulas en el lenguaje $\mathscr{L}$ con el álgebra de términos en dicho lenguaje; de este modo, podemos identificar valuaciones con homomorfismos (ver [1, capítulo II.10] para la definición de álgebra de términos).

Se puede probar que la relación recién definida es una relación de consecuencia[6]. Sin embargo, la misma no resulta en general finitaria, lo que no es en general deseable en un cálculo proposicional. Así que asociaremos a $\models_K$ una relación de consecuencia finitaria.

Definición 6. *Sea K una subclase de la clase de t-álgebras. Asociamos a K una relación binaria finitaria,* $\models_K^f$ *entre los conjuntos de fórmulas y las fórmulas, por*

$$\Gamma \models_K^f \varphi \text{ si y solo si existe un subconjunto finito } \Gamma_0 \subseteq \Gamma \text{ tal que } \Gamma_0 \models_K \varphi.$$

En particular, $\models_K^f$ *y* $\models_K$ *tienen las mismas tautologías.*

Vamos ahora a presentar un cálculo proposicional en el lenguaje $\mathscr{L}$, mediante un sistema tipo Hilbert.

Definición 7. *La* ***lógica de t-normas monoidales*** *(o* ***MTL*** *por su sigla en inglés) es la lógica sobre* $\mathscr{Fml}$ *dada por los esquemas de axiomas:*

(MTL 1) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow ((\beta \Rightarrow \delta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \delta))$,
(MTL 2) $(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \alpha$,
(MTL 3) $(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow (\beta \wedge \alpha)$,
(MTL 4) $(\alpha * (\alpha \Rightarrow \beta)) \Rightarrow (\alpha \wedge \beta)$,
(MTL 5) $((\alpha * \beta) \Rightarrow \delta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \delta))$,
(MTL 6) $(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \delta)) \Rightarrow ((\alpha * \beta) \Rightarrow \delta)$,
(MTL 7) $((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \delta)) \Rightarrow (((\beta \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \delta) \Rightarrow \delta)$,
(MTL 8) $0 \Rightarrow \alpha$,

que tiene como única regla modus ponens:

$$\frac{\alpha, \ \alpha \to \beta}{\beta}$$

Los conectivos 1 y $\vee$ *se definen en términos de los otros por:* $1 := 0 \Rightarrow 0$ *y* $\alpha \vee \beta := ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \beta) \wedge ((\beta \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha)$.

Esta no es la única presentación posible para esta lógica, pero alcanza para los objetivos del presente curso.

Algunas extensiones axiomáticas muy estudiadas de MTL son:

- **BL:** La lógica básica de Hájek es la extensión axiomática de MTL por el axioma de divisibilidad: $(\alpha * (\alpha \Rightarrow \beta)) \Rightarrow (\beta * (\beta \Rightarrow \alpha))$;
- **G:** La lógica de Gödel es la extensión axiomática de BL por el axioma de idempotencia: $\alpha \Rightarrow (\alpha * \alpha)$;
- **Ł:** La lógica infinitovalente de Łukasiewicz es la extensión axiomática de BL por el axioma de involución: $((\alpha \Rightarrow 0) \Rightarrow 0) \Rightarrow \alpha$;
- **P:** La lógica producto es la extensión axiomática de BL por el axioma de cancelación: $(\alpha \Rightarrow 0) \vee ((\alpha \Rightarrow (\alpha * \beta)) \Rightarrow \beta)$.

Escribamos $\vdash_{MTL}$ para indicar la relación de consecuencia en el sistema MTL. Escribamos asimismo $\vdash_{BL}$, $\vdash_G$, $\vdash_Ł$ y $\vdash_P$ para indicar la relación de consecuencia en las extensiones axiomáticas de MTL antes mencionadas.

[6]Sea F el conjunto de fórmulas en un lenguaje L. Una **relación de consecuencia** sobre F es una relación $\vdash \subseteq \wp(F) \times F$ tal que para todo $\Delta, \Gamma \in \wp(F)$ y $\varphi \in F$: (1) si $\varphi \in \Gamma$, entonces $\Gamma \vdash \varphi$; (2) si $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Gamma \subseteq \Delta$ entonces $\Delta \vdash \varphi$ y (3) si $\Gamma \vdash \varphi$ y para toda $\gamma \in \Gamma$, $\Delta \vdash \gamma$, entonces $\Delta \vdash \varphi$. Una relación de consecuencia se dice **finitaria** si cada vez que $\Gamma \vdash \varphi$, existe un subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que $\Gamma_0 \vdash \varphi$.

Consideremos las subclases de TA: TA, cTA, $G := \{[0,1]_G\}$, $Ł := \{[0,1]_L\}$ y $P := \{[0,1]_P\}$, donde $[0,1]_G$, $[0,1]_L$ y $[0,1]_P$ son las t-normas de Gödel, Łukasiewicz y producto, respectivamente, y cTA es la subclase de todas las t-normas continuas.

Tenemos el siguiente teorema de completitud para las lógicas antes definidas.

Teorema 3. *Con la notación de los párrafos anteriores,*

1. $\vdash_{MTL} = \models^f_{\mathrm{TA}}$,
2. $\vdash_{BL} = \models^f_{c\mathrm{TA}}$,
3. $\vdash_G = \models^f_G$,
4. $\vdash_Ł = \models^f_Ł$ *y*
5. $\vdash_P = \models^f_P$.

Vamos a definir clases ecuacionales de álgebras, asociadas a las t-normas. Escribamos $\mathscr{V}(K)$ para indicar la variedad generada por la clase K de álgebras; es decir, $\mathscr{V}(K) = HSP(K)$[7].

Definición 8. *A los elementos de $\mathscr{V}(\mathrm{TA})$ los demoninaremos **álgebras MTL**; a los de $\mathscr{V}(c\mathrm{TA})$, **álgebras BL**; a los de $\mathscr{V}(G)$, **álgebras de Gödel**; a los de $\mathscr{V}(Ł)$, **álgebras de Łukasiewicz**[8] y a los de $\mathscr{V}(P)$, **álgebras producto**.*

Definamos las siguientes abreviaturas para fórmulas en el lenguaje $\mathscr{L}$:

$$\alpha \Leftrightarrow \beta :=: (\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha) \quad \text{y} \quad \neg\alpha :=: \alpha \Rightarrow 0.$$

Fijemos una extensión axiomática E de MTL. Para cada subconjunto Γ de fórmulas definimos una relación binaria sobre $\mathscr{Fml}$ por:

$$\alpha \sim_\Gamma \beta \quad \text{si y solo si} \quad \Gamma \vdash_E \alpha \Leftrightarrow \beta.$$

Ejercicio. Verificar que la relación $\sim_\Gamma$ recién definida es de equivalencia.

La siguiente proposición justifica el interés desde un punto de vista lógico por el estudio de la variedad de las álgebras MTL y algunas estructuras relacionadas, el cual realizaremos en la sección siguiente.

Proposición 4. *Para toda extensión axiomática E de MTL, y todo conjunto de fórmulas Γ, la relación $\sim_\Gamma$ es una $\mathscr{L}$-congruencia. Además,*

a. Si E = MTL, entonces el álgebra cociente $\mathscr{Fml}/\sim_\Gamma$ es un álgebra MTL.
b. Si E = BL, entonces el álgebra cociente $\mathscr{Fml}/\sim_\Gamma$ es un álgebra BL.
c. Si E es G, Ł o P, entonces el álgebra cociente $\mathscr{Fml}/\sim_\Gamma$ es un álgebra de Gödel, de Łukasiewicz o producto, respectivamente.

2. ÁLGEBRAS MTL

En la sección anterior hemos motivado el estudio de la variedad <u>MTL</u>, de las álgebras MTL. Sin embargo, la descripción que hemos dado de la misma dista de ser explícita. En esta sección haremos una presentación ecuacional de esta variedad.

[7] Remitimos al lector al libro de Burris y Sankappanavar [1] para la definición de variedad o clase ecuacional de álgebras.

[8] Del modo en que las presentamos en este curso, se las suele denominar **álgebras de Wajsberg**; sin embargo, por una cuestión didáctica hemos preferido el nombre **"álgebras de Łukasiewicz"** para estas estructuras.

2.1. Generalidades y ejemplos.

Definición 9. *Un* ***MTL-rig***[9] *es un monoide negativamente ordenado* $(M,*,1,\leq)$*, con residuo* $\Rightarrow$*, cuyo conjunto parcialmente ordenado subyacente es un sup-semirretículo acotado* $(M,\vee,0)$*, el cual cumple además la siguiente condición:*

(PL) Para todo $x,y\in M$*,* $(x\Rightarrow y)\vee(y\Rightarrow x)=1$.

Si al sup-semirretículo subyacente no le pedimos que sea acotado (y por lo tanto no tenemos 0 en la signatura), a la estructura correspondiente la denominaremos un ***MTL-semirig****. Muchas propiedades importantes de los MTL-rigs no dependen de la presencia de un elemento mínimo, y por lo tanto muchas pruebas las haremos directamente para MTL-semirigs.*

De acuerdo a la definición anterior, un MTL-rig es un álgebra de tipo (2,2,2,0,0), $(M,*,\Rightarrow,\vee,1,0)$, tal que:

a. $(M,*,1)$ es un monoide,
b. $(M,\vee,0)$ es un semirretículo acotado,
c. para todo $x\in M$, $x\vee 0=x$,
d. para todo $x,y,z\in M$, $x*(y\vee z)=(x*y)\vee(x*z)$,
e. para todo $x,y,z\in M$, $x*y\leq z$ si y solo si $x\leq y\Rightarrow z$, donde el orden está dado por $x\leq y$ sii $x\vee y=y$, y
f. para todo $x,y\in M$, $(x\Rightarrow y)\vee(y\Rightarrow x)=1$.

Proposición 5. *Sea* $(M,*,\Rightarrow,\vee,1)$ *un MTL-semirig. Entonces:*

1. *Para todo* $x,y\in M$*,* $x*y\leq x$.
2. *Para todo* $x,y,z\in M$*, si* $x\leq y$ *entonces* $x*z\leq y*z$.
3. *Para todo* $x,y\in M$*,* $x*(x\Rightarrow y)\leq y$.
4. *Para todo* $x,y,z\in M$*, si* $x\leq y$ *entonces* $y\Rightarrow z\leq x\Rightarrow z$.
5. *Para todo* $x,y,z\in M$*,* $(x*y)\Rightarrow z=x\Rightarrow(y\Rightarrow z)$.
6. *Para todo* $x,y\in M$*,* $x\Rightarrow(x\vee y)=1$*, y en particular,* $x\Rightarrow x=1$.
7. *Para todo* $x,y\in M$*,* $x\leq y$ *si y solo si* $x\Rightarrow y=1$.

Demostración. (1.) Como M es un monoide y $1\geq y$, para todo $y\in M$, $x*(1\vee y)=x*1=x$. Por otra parte, $x*(1\vee y)=(x*1)\vee(x*y)=x\vee(x*y)$, de donde se sigue que $x\vee(x*y)=x$. Es decir, $x*y\leq x$.

(2.) Supongamos que $x\leq y$; es decir, que $x\vee y=y$. Entonces, para todo $z\in M$, $z*y=z*(x\vee y)=(z*x)\vee(z*y)$; es decir, $z*x\leq z*y$.

(3.) De la desigualdad trivial $x\Rightarrow y\leq x\Rightarrow y$, se sigue, por (e), que $x*(x\Rightarrow y)\leq y$.

(4.) Supongamos que $x\leq y$. Por (2.), $x*(y\Rightarrow z)\leq y*(y\Rightarrow z)$. Por (3.), $y*(y\Rightarrow z)\leq z$. Por la transitividad del orden, $x*(y\Rightarrow z)\leq z$. Finalmente, usando (e), $y\Rightarrow z\leq x\Rightarrow z$.

(5.) Por un lado tenemos que $(x*y)*(x\Rightarrow(y\Rightarrow z))=y*(x*(x\Rightarrow(y\Rightarrow z))\leq y*(y\Rightarrow z)\leq z$. Aplicando ahora (e) a la desigualdad anterior, resulta $x\Rightarrow(y\Rightarrow z)\leq(x*y)\Rightarrow z$.

Para la otra desigualdad, partamos del hecho de que $(x*y)*((x*y)\Rightarrow z)\leq z$. Reagrupando en el término izquierdo, se tiene que $y*(x*((x*y)\Rightarrow z))\leq z$, de donde se sigue, aplicando (e), que $x*((x*y)\Rightarrow z)\leq y\Rightarrow z$. Aplicando nuevamente (e), concluimos que $(x*y)\Rightarrow z\leq x\Rightarrow(y\Rightarrow z)$.

[9] La definición de **rig** se debe a S. H. Schanuel (ver [8]). Si bien las álgebras MTL pueden ser vistas como una clase particular de rigs, el empleo de esta terminología no es usual en el área, aunque la hemos adoptado a fin de reforzar el énfasis en la signatura empleada en este curso.

(6.) Partiendo de la desigualdad trivial $x \leq x \vee y$ y usando que $x * 1 = x$, tenemos que $x * 1 \leq x \vee y$. Aplicando (e) a esta desigualdad, concluimos que $1 \leq x \Rightarrow (x \vee y)$. Como 1 es el último elemento de M, $x \Rightarrow (x \vee y) = 1$.

Para ver que $x \Rightarrow x = 1$ utilicemos la igualdad que acabamos de probar y el hecho de que $x = x \vee x$.

(7.) Supongamos que $x \leq y$. Por (4.), $x \Rightarrow x \leq x \Rightarrow y$. Por (6.), $x \Rightarrow x = 1$, y por lo tanto, $x \Rightarrow y = 1$.

Recíprocamente, si $x \Rightarrow y = 1$, entonces $x = x * 1 = x * (x \Rightarrow y) \leq y$. □

Consideremos por un momento la clase ecuacional en la signatura $\{*, \Rightarrow, \vee, 1, 0\}$ con base ecuacional:

mtl 1. $x * y = y * x$
mtl 2. $x * 1 = x$
mtl 3. $x * (y * z) = (x * y) * z$

Es decir, $(M, *, 1)$ es un monoide.

mtl 4. $x \vee y = y \vee x$
mtl 5. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
mtl 6. $x \vee x = x$ y $x \vee 0 = x$

Es decir, $(M, \vee, 0)$ es un $\vee$-semirretículo acotado.

mtl 7. $x * (y \vee z) = (x * y) \vee (x * z)$
mtl 8. $x * 1 = 1$

Es decir, $(M, *, 1, \leq)$, con el orden $x \leq y$ si y solo si $x \vee y = y$, es un monoide negativamente ordenado.

mtl 9. $(x * (x \Rightarrow y)) \vee y = y$
mtl 10. $(x * y) \Rightarrow z = x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$
mtl 11. $x \Rightarrow (x \vee y) = 1$
mtl 12. $(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = 1$. Esta propiedad se suele denominar **prelinealidad** y nos referiremos a ella de esta forma en lo que sigue.

Por lo visto en la Proposición 5, todo MTL-rig satisface las ecuaciones anteriores. Veamos que todo elemento en la clase ecuacional que acabamos de definir es un MTL-rig. Para ello, bastará con ver que un elemento M en esta clase cumple:

(R) Para todo $x, y, z \in M$, $x * y \leq z$ si y solo si $x \leq y \Rightarrow z$;

es decir, la condición (e) en la Definición 9.

Supongamos que $x * y \leq z$; es decir, $(x * y) \vee z = z$. Entonces, por **mtl 11**, $(x * y) \Rightarrow z = (x * y) \Rightarrow (x * y) \vee z = 1$. Por otra parte, por **mtl 10**, $1 = (x * y) \Rightarrow z = x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$, y en consecuencia, $x = x * 1 = x * (x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \leq y \Rightarrow z$, valiendo la última desigualdad por **mtl 9**.

Recíprocamente, supongamos que $x \leq y \Rightarrow z$. Entonces, $x \vee (y \Rightarrow z) = y \Rightarrow z$ y por **mtl 11**, $x \Rightarrow (y \Rightarrow z) = 1$. Por **mtl 10**, $x \Rightarrow (y \Rightarrow z) = (x * y) \Rightarrow z$, y en consecuencia, $(x * y) \Rightarrow z = 1$. Luego, usando **mtl 9**, tenemos que $(x * y) = (x * y) * 1 = (x * y) * ((x * y) \Rightarrow z) \leq z$.

Hemos probado el siguiente resultado.

Proposición 6. *La clase de los MTL-rigs forma una variedad.*

A fin de facilitar la comparación de la variedad de MTL-rigs con otras estructuras relacionadas necesitamos el siguiente lema.

Lema 7. *Sea M un MTL-rig. Entonces el conjunto ordenado subyacente $(M, \leq)$ es un retículo.*

Demostración. Definamos sobre M una operación binaria por

$$x \wedge y := (x * (x \Rightarrow y)) \vee (y * (y \Rightarrow x)).$$

Como $x * (x \Rightarrow y) \leq y$ e $y * (y \Rightarrow x) \leq y * 1 \leq y$, $x \wedge y \leq y$. Como $x * (x \Rightarrow y) \leq x * 1 \leq x$ e $y * (y \Rightarrow x) \leq x$, $x \wedge y \leq x$. En consecuencia, $x \wedge y$ es una cota inferior de $\{x, y\}$ en M.

Por otra parte, supongamos que $z \leq x, y$ es una cota inferior de $\{x, y\}$. Entonces, $z * (x \Rightarrow y) \leq x * (x \Rightarrow y)$ y $z * (y \Rightarrow x) \leq y * (y \Rightarrow x)$, por monotonía. En consecuencia,

$$(z * (x \Rightarrow y)) \vee (z * (y \Rightarrow x)) \leq (x * (x \Rightarrow y)) \vee (y * (y \Rightarrow x)) = x \wedge y.$$

Por la distributividad de $*$ en $\vee$ y la propiedad de prelinealidad, tenemos que

$$(z * (x \Rightarrow y)) \vee (z * (y \Rightarrow x)) = z * ((x \Rightarrow y)) \vee (y \Rightarrow x)) = z * 1 = z.$$

En consecuencia, $z \leq x \wedge y$, de donde se deduce que $x \wedge y$ es, en efecto, el ínfimo de $\{x, y\}$ en M. □

Para aquellos familiarizados con las definiciones de retículos residuados conmutativos integrales y prelineales y la de semihoops[10], de los resultados anteriores se tiene como consecuencia inmediata el siguiente corolario que permite vincular la presentación que hacemos aquí de las álgebras MTL con otras que aparecen en la literatura.

Corolario 8. *La variedad de MTL-rigs es equivalente por términos a la variedad de retículos residuados conmutativos, integrales, acotados y prelineales y, en consecuencia, a la de semihoops con primer elemento.*

Como ya hemos indicado, el primer elemento de un MTL-rig es absorbente; es decir, para todo $x \in M$, $0 * x = 0$.

Definición 10. *Todo **MTL-rig** puede ser visto como un álgebra en el lenguaje $S = \{*, \Rightarrow, \wedge, \vee, 0, 1\}$. Un **álgebra MTL** no es más que un MTL-rig, pensado en esta signatura. La variedad MTL es la clase ecuacional en la signatura S, formada por todas las álgebras MTL.*

Dado que no hay posibilidad de confusión, utilizaremos los mismos nombres para indicar a las variedades y a las respectivas categorías algebraicas que tienen a la variedad como clase de objetos.

Dado que las MTL-álgebras son una clase particular de retículos residuados conmutativos e integrales, muchos de los resultados que daremos a continuación son casos particulares de resultados bien conocidos de la teoría de retículos residuados (ver por ejemplo [5]); sin embargo, por una cuestión de autocontención, daremos una presentación de los mismos adecuada al contexto particular que nos interesa.

Definición 11. *Un **MTL-filtro** (o simplemente **filtro**) de un MTL-rig M es un subconjunto $F \subseteq M$ tal que:*

1. $1 \in F$,
2. *si* $x \in F$, $y \in M$ *y* $x \leq y$, *entonces* $y \in F$, *y*
3. *si* $x, y \in F$ *entonces* $x * y \in F$.

[10] Las estructuras que aquí denominamos semihoops también se encuentran en la literatura con los nombres de *prelinear semihoops* [7] y *basic semihoops* [3], donde se utiliza el término *semihoop* para estructuras que no necesariamente cumplen el axioma de prelinealidad.

Sea $b \in F$. Como M es un monoide negativamente ordenado, para todo $a \in F$, $a * b \in F$ y $a * b \leq b$. En consecuencia, $b \leq a \Rightarrow b$, de donde se sigue que $a \Rightarrow b \in F$; es decir, F es también cerrado por $\Rightarrow$.

Proposición 9. *Sea M un MTL-rig. Existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de MTL-filtros de M y el conjunto de congruencias de MTL-rigs de M.*

Demostración. Escribamos $\mathrm{Fil}(M)$ para indicar el conjunto de filtros de M y $\mathrm{Cong}(M)$ para el de congruencias de M. Definamos para $F \in \mathrm{Fil}(M)$ y $\theta \in \mathrm{Cong}(M)$:

$$\begin{aligned}\Theta(F) &:= \{(a,b) \in M \times M \mid \text{existe } f \in F \text{ tal que } a * f \leq b \text{ y } b * f \leq a\} \\ &= \{(a,b) \in M \times M \mid a \Rightarrow b \in F \text{ y } b \Rightarrow a \in F\}\end{aligned}$$

y

$$\Phi(\theta) := \{m \in M \mid (m,1) \in \theta\},$$

respectivamente.

Por definición, $\Phi(\theta) = \theta(1)$, la clase del 1 módulo θ. Como θ es una congruencia de MTL-rigs, en particular lo es del reducto en retículos de M, y por lo tanto es un convexo que contiene al 1 y es cerrado por ínfimos (es decir, un filtro de retículos). Además, si $a,b \in \theta(1)$, $(a,1),(b,1) \in \theta$. Como θ es congruencia de MTL-semirigs, $(a*b, 1*1) \in \theta$; es decir, $a * b \in \Phi(\theta)$. Luego, $\Phi(\theta)$ es un MTL-filtro.

En consecuencia, la asignación $\theta \mapsto \Phi(\theta)$ define una correspondencia $\Phi : \mathrm{Cong}(M) \to \mathrm{Fil}(M)$.

Veamos ahora que $\Theta(F) \in \mathrm{Fil}(M)$. Dejamos a cargo del lector el verificar que $\Theta(F)$ es en efecto una relación de equivalencia sobre M. Veamos que esta relación es una congruencia de MTL-rigs.

Sean $(a,b),(c,d) \in \Theta(F)$, entonces existen $f,g \in F$ tales que $a*f \leq b$, $b*f \leq a$, $c*g \leq d$ y $d*g \leq c$. Como $f \wedge g \geq f * g \in F$, y F es creciente, $h = f \wedge g \in F$. Luego, $a*h \leq b$, $b*h \leq a$, $c*h \leq d$ y $d*h \leq c$, y en consecuencia, $(a*c)*h^2 \leq (b*d)$ y $(b*d)*h^2 \leq (a*c)$. Es decir, $(a*c, b*d) \in \Theta(F)$.

De forma análoga se prueba que si $(a,b),(c,d) \in \Theta(F)$, entonces $(a \vee c, b \vee d) \in \Theta(F)$.

Sean $(a,b),(c,d) \in \Theta(F)$, y $h \in F$ como antes. Como $b*h \leq a$, $(b*h)*(a \Rightarrow c) \leq a*(a \Rightarrow c) \leq c$. Luego, $(b*h^2)*(a \Rightarrow c) \leq h*c \leq d$. En consecuencia, $h^2 * (a \Rightarrow c) \leq b \Rightarrow d$. De modo análogo, como $a*h \leq b$, obtenemos que $h^2 * (b \Rightarrow d) \leq a \Rightarrow c$. Concluimos así que $(a \Rightarrow c, b \Rightarrow d) \in \Theta(F)$.

En consecuencia, la asignación $F \mapsto \Theta(F)$ define una correspondencia $\Theta : \mathrm{Fil}(M) \to \mathrm{Cong}(M)$.

Veamos que las correspondencias Θ y Φ son inversas. Por definición,

$$\Theta(\Phi(\theta)) = \{(a,b) \in M \times M \mid \text{existe } h \in \theta(1) \text{ tal que } a*h \leq b \text{ y } b*h \leq a\}$$

Si $(u,v) \in \theta$ entonces $u \Rightarrow v, v \Rightarrow u \in \theta(1)$, y en consecuencia $h = (u \Rightarrow v) \wedge (v \Rightarrow u) \in \theta(1)$. Además, $u*h \leq v$ y $v*h \leq u$. En consecuencia, $(u,v) \in \Theta(\Phi(\theta))$. De donde concluimos que $\theta \subseteq \Theta(\Phi(\theta))$.

Por otra parte, si $(u,v) \in \Theta(\Phi(\theta))$, entonces existe $h \in M$ tal que $(h,1) \in \theta$, $u*h \leq v$ y $v*h \leq u$. Luego, $((u*h) \vee v, u \vee v) \in \theta$ y $((v*h) \vee u, u \vee v) \in \theta$, de donde se sigue que $((u*h) \vee v, (v*h) \vee u) \in \theta$. Como $(u*h) \vee v = v$ y $(v*h) \vee u = u$, $(u,v) \in \theta$. De donde concluimos que $\Theta(\Phi(\theta)) \subseteq \theta$, y por lo tanto, $\Theta(\Phi(\theta)) = \theta$.

Finalmente, para $F \in \mathrm{Fil}(M)$, tenemos que

$$\Phi(\Theta(F)) = \{m \in M \mid (m,1) \in \Theta(F)\}$$

Luego, para todo $f \in F$ se tiene que $(f,1) \in \Theta(F)$; es decir, $F \subseteq \Phi(\Theta(F))$. Por otra parte, si $a \in \Phi(\Theta(F))$, entonces $(a,1) \in \Theta(F)$, y por lo tanto existe $h \in F$ tal que $a * h \leq 1$ y $1 * h \leq a$. Como $h \leq a$ y $h \in F$, $a \in F$. Así que tenemos que $\Phi(\Theta(F)) \subseteq F$. □

De hecho, la construcción anterior establece un isomorfismo de orden entre los retículos $\mathrm{Fil}(M)$ y $\mathrm{Cong}(M)$. La verificación de este hecho se deja a cargo del lector.

Recordemos el siguiente resultado de álgebra universal: *Un álgebra A es* ***subdirectamente irreducible*** *si y solo si o bien es trivial o bien hay una congruencia mínima en el conjunto* $\mathrm{Cong}(A) - \{\Delta\}$ (ver [1, Teorema 8.4]).

A continuación utilizaremos la correspondencia que hay entre MTL-filtros de un MTL-rig M y las congruencias de M, para reformular el resultado anterior del siguiente modo:

Un MTL-rig M es subdirectamente irreducible *si y solo si hay un elemento mínimo en el conjunto* $\mathrm{Fil}(M) - \{\{1\}\}$.

A continuación vamos a caracterizar los elementos subdirectamente irreducibles en la variedad de los MTL-rigs.

Veamos que todo MTL-rig subdirectamente irreducible está totalmente ordenado. Para ello utilizaremos los dos siguientes lemas. El primero se deduce de forma directa de la definición de MTL-filtro. El segundo es un caso particular del Lema 2.5 en [5]. Por una cuestión de autocontención daremos aquí su prueba.

Lema 10. *Sean M un MTL-rig y $X \subseteq M$. El MTL-filtro generado por X está dado por*

$$\langle X \rangle = \{m \in M \mid \textit{existe } h \in \langle X \rangle_* \textit{ tal que } h \leq m\},$$

siendo $\langle X \rangle_*$ el submonoide generado por X.

En particular, cuando $X = \{x\}$, escribiremos

$$\langle x \rangle := \langle \{x\} \rangle = \{m \in M \mid \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x^n \leq m\}.$$

Lema 11 ([5, Lema 2.5])**.** *Sea M un MTL-rig y $a,b \in M$. Entonces,*

i. para todo $n \in \mathbb{N}$, $(a \vee b)^n \leq a \vee b^n$ y
ii. para todo $m,n \in \mathbb{N}$, $(a \vee b)^{mn} \leq a^m \vee b^n$.

Demostración. Probaremos (i.) por inducción en n. Si $n = 0$, $(a \vee b)^0 = 1 = a \vee 1 = a \vee b^0$, de donde se sigue la desigualdad. Supongamos ahora que la desigualdad se satisface para un $n \geq 0$. Entonces,

$$(a \vee b)^{n+1} = (a \vee b) * (a \vee b)^n \leq (a \vee b) * (a \vee b^n) = a^2 \vee a * b^n \vee a * b \vee b^{n+1} \leq a \vee b^{n+1}.$$

Para probar (ii.), aplicamos dos veces seguidas (i.), cambiando los roles de a y b adecuadamente:

$$(a \vee b)^{mn} = ((a \vee b)^n)^m \leq (a \vee b^n)^m \leq (a^m \vee b^n).$$ □

Supongamos ahora que M es un MTL-rig que no está totalmente ordenado. Entonces existen elementos $a,b \in M$ que son incomparables. Luego, como son incomparables, $a \Rightarrow b \neq 1$ y $b \Rightarrow a \neq 1$. En consecuencia, $\langle a \Rightarrow b \rangle$ y $\langle b \Rightarrow a \rangle$ son filtros propios. Por el Lema 10,

$$\langle a \Rightarrow b \rangle = \{z \in M \mid \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } (a \Rightarrow b)^n \leq z\}$$

y
$$\langle b \Rightarrow a\rangle = \{w \in M \mid \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } (b \Rightarrow a)^n \leq w\}.$$
Luego, si $u \in \langle a \Rightarrow b\rangle \cap \langle b \Rightarrow a\rangle$, existen $m,n \in \mathbb{N}$ tales $(a \Rightarrow b)^m \leq u$ y $(b \Rightarrow a)^n \leq u$. En consecuencia, $(a \Rightarrow b)^m \vee (b \Rightarrow a)^n \leq u$. Por el Lema 11, $((a \Rightarrow b) \vee (b \Rightarrow a))^{mn} \leq (a \Rightarrow b)^m \vee (b \Rightarrow a)^n$, y por lo tanto, $((a \Rightarrow b) \vee (b \Rightarrow a))^{mn} \leq u$. Por el axioma (PL), $((a \Rightarrow b) \vee (b \Rightarrow a))^{mn} = 1$, de donde se sigue que $u = 1$. Hemos probado que $\langle a \Rightarrow b\rangle \cap \langle b \Rightarrow a\rangle = \{1\}$.

Luego, $\bigcap(\mathrm{Fil}(M) - \{\{1\}\}) = \{\{1\}\}$ y por lo tanto $\mathrm{Fil}(M) - \{\{1\}\}$ no tiene elemento mínimo, de donde se sigue que M no es subdirectamente irreducible.

Como consecuencia directa del resultado anterior, y del hecho de que los elementos subdirectamente irreducibles de una variedad generan a la misma como variedad (ver [1, Corolario 9.7]), tenemos el siguiente resultado.

Proposición 12. *La variedad de los MTL-rigs está generada como tal por las MTL-cadenas.*

Veamos que de hecho las MTL-cadenas finitas generan a esta variedad. Para ello, y por una cuestión de completitud, reproduciremos aquí la prueba dada en [9].

Sea φ un término en el lenguaje de los MTL-rigs, tal que la identidad $\varphi \approx 1$ no se cumple en la variedad.[11] Entonces hay un MTL-rig totalmente ordenado[12] C y una interpretación de las variables de φ en C de modo que $\varphi^C \neq 1$. Indiquemos con $\mathrm{Sub}(\varphi)$ al conjunto de todos los subtérminos (en la signatura correspondiente) de φ y por $X := \{\psi^C \mid \psi \in \mathrm{Sub}(\varphi)\} \cup \{0,1\}$, el conjunto de las interpretaciones en C de los subtérminos de φ (posiblemente unión las constantes). Claramente, $X \subseteq C$. Como X es una subcadena de C, será cerrada por supremos e ínfimos en C.

Llamemos M_X al submonoide (ordenado) de C generado por X y tomemos $I_X := \{m \Rightarrow x \mid m \in M_X \text{ y } x \in X\}$. Si $a \in I_X$, digamos, $a = m \Rightarrow x$, entonces, para todo $n \in M_X$, se tiene que $n \Rightarrow a = n \Rightarrow (m \Rightarrow x) = (m * n) \Rightarrow x \in I_X$, dado que $m * n \in M_X$. Claramente, $X \subseteq M_X$. Además, como para todo $x \in X$, $1 \Rightarrow x = x$, $X \subseteq I_X$. En consecuencia, se tiene que $X \subseteq M_X \cap I_X$.

Observación 4. *Con la notación de los párrafos anteriores:*

1. *El conjunto ordenado M_X tiene la propiedad de cadena ascendente. En efecto, dado que X es finito, M_X solo puede intersecar una cantidad finita de componentes arquimedianas. Además, para cada $m \in M_X$, como es un producto finito de la forma $m = \prod_{x \in X} x^{j(x)}$, con $j(x) \in \mathbb{N}$, para todo x y M_X está negativamente ordenado, debe haber una cantidad finita de elementos de M_X mayores que m, en su misma componente arquimediana. En consecuencia, cada cadena ascendente comenzando en un elemento de M_X solo puede tener finitos términos distintos.*
2. *El conjunto I_X tiene la propiedad de cadena descendente (y por lo tanto es un buen orden). Para ver esto, consideremos, para cada $x \in X$, la aplicación $\varphi_x : M_X \to I_X$, dada por $\varphi_x(m) := m \Rightarrow x$. Por las propiedades de la operación $\Rightarrow$, φ_x es un antimorfismo de orden. Además, por definición, $I_X = \bigcup_{x \in X} \varphi_x(M_X)$. Como X es finito, de la propiedad de cadena ascendente de M_X se sigue la propiedad de cadena descendente de I_X.*

[11] Observar que toda identidad $\psi \approx \psi'$ en este lenguaje se satisface en la variedad si y solo si las identidades $\psi \Rightarrow \psi' \approx 1$ y $\psi' \Rightarrow \psi \approx 1$ lo hacen, por lo que, sin pérdida de generalidad, podemos restringir nuestro argumento para las identidades de la forma $\varphi \approx 1$.

[12] Dado que la variedad de los MTL-rigs está generada por sus elementos totalmente ordenados.

Por la Observación 4.1, para todo $c \in C$, el conjunto $\{m \in M_X \mid m \leq c\}$ (que es no vacío pues contiene al 0) tiene un elemento máximo, $c^i \in M_X$; por la Observación 4.2, el conjunto $\{u \in I_X \mid c \leq u\}$ (que no es vacío pues contiene al 1) tiene un elemento mínimo, $c^s \in I_X$.

Diremos que un elemento $u \in I_X$ es **estable** si $u = u^{is}$. Vamos a denotar el conjunto de todos los elementos estables por E_X. Observar que:

i. un elemento $u \in I_X$ es estable si y solo si para todo $v \in I_X$, si $u \leq v \leq u^i$ entonces $v = u$;
ii. todo elemento $a \in M_X \cap I_X$ es estable ya que $a = a^i = a^s$, en particular todo elemento de X lo es, y
iii. las aplicaciones $(\cdot)^i : C \to M_X$ y $(\cdot)^s : C \to I_X$ son monótonas y para cualesquiera $m \in M_X$, $u, v \in I_X$ y $c \in C$, cumplen que:
   1. $m \leq m^{si}$ y $u^{is} \leq u$,
   2. $m \leq u$ si y solo si $m^s \leq u$,
   3. $m \leq u$ si y solo si $m \leq u^i$,
   4. $m^{sis} = m^s$ (es decir, m^s es estable) y
   5. $c^{isis} = c^{is}$ (es decir, c^{is} es estable).

Lema 13. *El conjunto de los elementos estables E_X, definido anteriormente, es finito.*

Demostración. Como $E_X \subseteq M_X \cap I_X$, entonces E_X posee la propiedad de cadena ascendente y la de cadena descendente. Como es una cadena, es finito. ☐

A continuación vamos a definir sobre E_X una operación binaria $\circ : E_X \times E_X \to E_X$ por:

$$e \circ f := (e^i * f^i)^s.$$

Veamos que en efecto está bien definida. Como $e^i * f^i \in M_X$, por ser producto de elementos en M_X, $(e^i * f^i)^s$ es estable por la observación iii.4. que sigue a la definición de elemento estable.

Lema 14. *Si $e, f \in E_X$ y $m, n \in M_X$ son tales que $e = m^s$ y $f = n^s$, entonces $e \circ f = (m * n)^s$.*

Demostración. Para todo $u \in I_X$, tenemos que

$$\begin{aligned} m * n \leq u \quad & \text{si y solo si} \quad n \leq m \Rightarrow u \\ & \text{si y solo si} \quad n^s \leq m \Rightarrow u \\ & \text{si y solo si} \quad f \leq m \Rightarrow u. \end{aligned}$$

Veamos que $f \leq m \Rightarrow u$ si y solo si $f^i \leq m \Rightarrow u$. Una de las implicaciones es inmediata, dado que $f \leq f^i$. La otra se sigue de que $f = f^{is} \leq (m \Rightarrow u)^s = m \Rightarrow u$. Luego, $m * n \leq u$ si y solo si $f^i \leq m \Rightarrow u$ si y solo si $m * f^i \leq u$. De modo análogo se deduce que $m * f^i \leq u$ si y solo si $e^i * f^i \leq u$. En consecuencia, tenemos que $(m * n)^s = (e^i * f^i)^s = e \circ f$. ☐

El próximo lema establece que la operación definida sobre E_X lo dota de una estructura de monoide ordenado.

Lema 15. *La operación binaria $\circ$, definida sobre E_X, es conmutativa, asociativa y tiene neutro 1.*

Demostración. La conmutatividad es inmediata de la definición de $\circ$. Además, si $a \in E_X$, $a \circ 1 = (a^i * 1^i)^s = (a^i * 1)^s = (a^i)^s = a$.

Sean $a, b, c \in E_X$. Por el Lema 14,

$$((a \circ b) \circ c) = (a^i * b^i)^s \circ c = (a^i * b^i)^s \circ c^{is} = (a^i * b^i * c^i)^s$$

y

$$(a \circ (b \circ c)) = a \circ (b^i * c^i)^s = a^{is} \circ (b^i * c^i)^s = (a^i * b^i * c^i)^s,$$

de donde se sigue la asociatividad. $\square$

De hecho, $(E_X, \vee, \circ, 0, 1)$ resulta ser un MTL-rig, como se prueba en el siguiente lema.

Lema 16. *La operación binaria $\circ$, definida sobre E_X, tiene residuo. El mismo está dado por $a \to b = (a^i \Rightarrow b)^{is}$, para todo $a, b \in E_X$.*

Demostración. El residuo de $\circ$, de existir, viene dado por

$$a \to b := \text{máx}\{e \in E_X \mid a \circ e \leq b\}.$$

El conjunto $\{e \in E_X \mid a \circ e \leq b\} \neq \emptyset$ para todo $a, b \in E_X$, ya que por ejemplo, 0 es elemento. Como E_X es una cadena finita, el máximo de este conjunto existe.

Por otra parte, para cualesquiera $a, b, e \in E_X$, se tiene que

$$\begin{aligned} a \circ e \leq b \quad & \text{si y solo si} \quad (a^i * e^i)^s \leq b \\ & \text{si y solo si} \quad a^i * e^i \leq b \\ & \text{si y solo si} \quad e^i \leq a^i \Rightarrow b \\ & \text{si y solo si} \quad e = e^{is} \leq (a^i \Rightarrow b)^s = a^i \Rightarrow b \\ & \text{si y solo si} \quad e = e^{is} \leq (a^i \Rightarrow b)^{is}. \end{aligned}$$

En consecuencia, tenemos que $a \circ e \leq b$ si y solo si $e \leq (a^i \Rightarrow b)^{is}$. Finalmente, como $(a^i \Rightarrow b)^{is} \in E_X$, se sigue que $a \to b = (a^i \Rightarrow b)^{is}$. $\square$

Los resultados de los Lemas 13, 15 y 16 pueden resumirse en el siguiente teorema.

Teorema 17. *El álgebra $C^* = (E_X, \vee, \wedge, \circ, \to, 0, 1)$ es una MTL-cadena finita.*

Notemos que si $a, b \in E_X$ pensado como subconjunto de C, entonces se tiene que:

1. si $a \circ b \in E_X$, entonces $a \circ b = a * b$, por la definición de $\circ$ y de elemento estable, y
2. si $a \Rightarrow b \in E_X$, entonces $a \to b = a \Rightarrow b$, por la definición de elemento estable y la igualdad del Lema 16.

En particular, como $X \subseteq E_X$, esto se aplica a los elementos de X. Luego, interpretando las variables atómicas del mismo modo que en C, tendremos que $\varphi^C = \varphi^{C^*}$.

Volviendo a nuestro objetivo inicial, hemos obtenido un MTL-semirig, C^*, totalmente ordenado y finito en el cual, si $\varphi^C \neq 1$, $\varphi^{C^*} = \varphi^C \neq 1$. En consecuencia, la identidad $\varphi \approx 1$ falla en una cadena finita, si falla en alguna cadena.

De este modo hemos probado el siguiente hecho.

Teorema 18. *La variedad de los MTL-rigs está generada por sus cadenas finitas.*

Como ya hemos indicado, si $*$ es una t-norma continua a izquierda, entonces $([0,1], *, \Rightarrow, \vee, 0, 1)$ es un MTL-rig. En consecuencia, la clase de estos MTL-rigs (denominados **MTL-rigs estándar**) generan una subvariedad de la de MTL-rigs. Nuestro próximo objetivo es ver que esta subvariedad es impropia.

Proposición 19. *Todo MTL-rig finito y totalmente ordenado es isomorfo a un sub MTL-rig de un MTL-rig estándar.*

Demostración. Aquí daremos una prueba alternativa a la dada por Jenei y Montagna en [6].

Sea $M = (M, *, \Rightarrow, \vee, 1, 0)$ un MTL-rig finito y totalmente ordenado, y supongamos que $|M| = m + 1 \in \mathbb{N}$. Como M es totalmente ordenado, los $m + 1$ elementos de M se pueden listar en forma ordenada como: $0 = a_0 < \ldots < a_i < a_{i+1} < \ldots < a_m = 1$. Cosideremos el subconjunto de $[0,1]$ de la forma $M' := \{\frac{j}{m} \mid j = 0, \ldots, m\}$. Identificando los elementos de M con los de M', obtenemos una inmersión de orden obvia $\varphi : M \rightarrowtail [0,1]$, por $\varphi(a_i) = \frac{i}{m}$. Vamos a definir una t-norma de modo que dicha inmersión se extienda a un morfismo de MTL-rigs.

Definamos para cada par $0 < i, j \leq m$ una función $f_{ij} : (\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times (\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}] \to [0,1]$ por $f_{ij}(x,y) := \varphi(a_i * a_j)$. Dado que estas funciones son constantes sobre todo su dominio, son continuas sobre él. Para el caso en que i o j sean 0, tomaremos: $f_{0j} : \{0\} \times (\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}] \to [0,1]$, $f_{i0} : (\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times \{0\} \to [0,1]$ y $f_{00} : \{0\} \times \{0\} \to [0,1]$ como las funciones idénticamente nulas.

Observar que los dominios de las funciones f_{ij} forman una partición, $P = \bigcup_{i,j} D_{ij}$, de $[0,1] \times [0,1]$. Definamos ahora una función $f : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ por $f(x,y) := f_{i,j}$, si $(x,y) \in D_{ij}$. Por construcción, f es continua a izquierda en cada coordenada. Además, como su valor en cada D_{ij} solo depende de i y j, resulta ser una t-norma continua a izquierda. Luego, tiene un residuo $\Rightarrow_f$. Finalmente, como $\varphi(a_i * a_j) = f_{ij}(\varphi(a_i), \varphi(a_j)) = f(\varphi(a_i), \varphi(a_j))$, φ es un morfismo de monoides de M en $([0,1], f, 0, 1)$. Se deja a cargo del lector la verificación de que φ es de hecho un morfismo de MTL-rigs en el MTL-rig estándar $([0,1], f, \Rightarrow_f, 0, 1)$. $\square$

Corolario 20. *Todo MTL-rig finito totalmente ordenado es una subálgebra de un MTL-rig estándar. En consecuencia, los MTL-rigs estándar generan la misma variedad que los MTL-rigs totalmente ordenados finitos; es decir toda la variedad de los MTL-rigs.*

Concluyamos esta sección recordando que la Definición 10 afirma que las MTL-álgebras no son más que MTL-rigs (pensados en una signatura con ínfimo), por lo tanto, el corolario anterior puede ser reformulado como: ***la variedad de las álgebras MTL está generada por las álgebras MTL estándar; es decir, por las t-normas continuas a izquierda***.

AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer a los organizadores del "XIV Congreso Dr. Antonio Monteiro" por la invitación a dictar el curso que dio origen a estas notas. También quiero agradecer a Rodolfo Értola y a Diego Castaño por haberme hecho notar numerosos errores de tipeo y estilo, los cuales espero haber logrado en parte subsanar.

REFERENCIAS

[1] S. Burris & H. P. Sankappanavar. A course in universal algebra. Springer-Verlag, New York, 1981. MR 0648287.

[2] P. Cintula & C. Noguera. A general framework for mathematical fuzzy logic. In: Handbook of mathematical fuzzy logic. Volume 1, 103–207, Studies in Logic, 37, Mathematical Logic and Foundations. College Publications, London, 2011. MR 3098606.

[3] F. Esteva, L. Godo, P. Hájek & F. Montagna, Hoops and fuzzy logic. J. Logic Comput. 13 (2003), no. 4, 532–555. MR 1999962.

[4] P. Hájek. Metamathematics of fuzzy logic, Trends in Logic–Studia Logica Library, vol. 4. Kluwer, Dordrecht, 1998. MR 1900263.

[5] J. B. Hart, L. Rafter & C. Tsinakis, The structure of commutative residuated lattices, Internat. J. Algebra Comput. 12 (2002), no. 4, 509–524. MR 1919685.

[6] S. Jenei & F. Montagna. A proof of standard completeness for Esteva and Godo's logic MTL. Studia Logica 70 (2002), no. 2, 183–192. MR 1894392.

[7] C. Noguera, F. Esteva & J. Gispert, Perfect and bipartite IMTL-algebras and disconnected rotations of prelinear semihoops. Arch. Math. Logic 44 (2005), no. 7, 869–886. MR 2192159.
[8] S. H. Schanuel, Negative sets have Euler characteristic and dimension. In: Category Theory (Como, 1990), 379–385. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1488, Springer, Berlin, 1991. MR 1173024.
[9] C. J. van Alten, Preservation theorems for MTL-chains, Logic J. IGPL 19 (2011), no. 3, 490–511. MR 2802874.

Aquellos interesados en profundizar el estudio de las álgebras MTL pueden consultar la siguiente bibliografía.

Bibliografía complementaria

[C1] L. Běhounek, P. Cintula & P. Hájek. Introduction to mathematical fuzzy logic. In: Handbook of mathematical fuzzy logic. Volume 1, 1–101, Studies in Logic, 37, Mathematical Logic and Foundations. College Publications, London, 2011. MR 3098605.
[C2] R. Cignoli, F. Esteva, L. Godo & A. Torrens. Basic Fuzzy Logic is the logic of continuous t-norms and their residua, Soft Computing 4 (2000), 106–112.
[C3] F. Esteva & L. Godo. Monoidal t-norm based logic: Towards a logic for left-continuous t-norms. Fuzzy Sets and Systems 124 (2001), 271–288. MR 1860848.

Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata y Conicet, Argentina
E-mail: jlc@mate.unlp.edu.ar