ACTAS DEL XIII CONGRESO
DR. ANTONIO A. R. MONTEIRO (2015)
2016, Páginas 43–54

ACERCA DE LAS ÁLGEBRAS DE FOMIN–KIRILLOV

CRISTIAN VAY

RESUMEN. Estas son las notas de la conferencia brindada durante el XIII Congreso Antonio Monteiro. Haremos un recorrido por los trabajos que tienen como objeto de estudio a las álgebras de Fomin–Kirillov, que son el ejemplo de álgebras de Nichols sobre grupos no abelianos que despierta mayor interés en la actualidad.

Agradezco al comité organizador por la invitación a participar en este congreso.

1. LAS ÁLGEBRAS DE FOMIN–KIRILLOV

El anillo de cohomología de la variedad de bandera (de tipo A) es isomorfo a

$$\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]/I_n,$$

donde I_n es el ideal generado por los polinomios simétricos. Los polinomios de Schubert $\{\mathfrak{S}_w \mid w \in \mathbb{S}_n\}$ forman una base distinguida de este anillo, y satisfacen que las constantes de las reglas de multiplicación son números no negativos, pues pueden interpretarse geométricamente como la cantidad de puntos en cierta intersección. Sin embargo, no se ha podido demostrar la no negatividad de estas constantes de manera combinatoria y esta fue la intención de Fomin y Kirillov al introducir las álgebras que hoy llevan sus nombres[1]

Las álgebras de Fomin–Kirillov [21], denotadas $\mathscr{FK}_n$ con $n \in \mathbb{N}$, son generadas por elementos $[ij]$, con $1 \le i < j \le n$, sujetos a las relaciones

$$[ij]^2 = 0 \quad \text{para} \quad i<j; \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &[ij][jk] = [jk][ik] + [ik][ij], \\ &[jk][ij] = [ik][jk] + [ij][ik] \quad \text{para } i<j<k; \end{aligned} \tag{2}$$

$$[ij][kl] = [kl][ij] \quad \text{para } \{i<j\} \cap \{k<l\} = \emptyset. \tag{3}$$

Estas relaciones aparecen cuando uno analiza la acción de los operadores de diferencias dividas ∂_{ij} sobre $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$:

$$\partial_{ij} f = \frac{f-(ij)f}{x_i - x_j},$$

donde la trasposición (ij) actúa sobre $f \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$ de manera canónica intercambiando las indeterminadas x_i y x_j. Por lo que Fomin y Kirillov interpretan a $\mathscr{FK}_n$ como un cubrimiento cuadrático universal del álgebra generada por los operadores ∂_{ij} y encuentran al anillo de cohomología de la variedad de bandera como una subálgebra de $\mathscr{FK}_n$. Específicamente, ellos definen los elementos de Dunkl

$$\theta_j = \sum_{k \neq j} [jk]$$

y prueban que el mapa

$$\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]/I_n \longrightarrow \mathscr{FK}_n, \quad x_j \mapsto \theta_j \quad \forall j$$

[1] En [21] se pueden encontrar referencias y un tratamiento detallado acerca de la cohomología de las variedades de banderas y los polinomios de Schubert.

induce un morfismo de álgebras inyectivo.

Los autores conjeturaron que la evaluación de los polinomios de Schubert $\mathfrak{S}_w(\theta_1,\dots,\theta_n)$ en los elementos de Dunkl viven en el cono positivo $\mathscr{F}\mathscr{K}_n^+$, lo que viene a ser las combinaciones lineales positivas de monomios en los $[ij]$. Esta conjetura implicaría lo no negatividad de las constantes de multiplicación de los polinomios de Schubert y daría una descripción combinatoria de estas constantes. Meszaros, Panova y Postnikov desarrollaron esta idea y lograron completarla con éxito para varios casos [42, 38].

2. Las álgebras de Nichols

Un álgebra de Nichols es un álgebra de Hopf graduada en una categoría trenzada que satisface ciertas propiedades [4, 10, 40]. Para fijar ideas, consideremos la categoría que nos interesa aquí, esta es la categoría ${}^H_H\mathscr{YD}$ de módulos de Yetter–Drinfeld sobre un álgebra de Hopf H. Sea $V \in {}^H_H\mathscr{YD}$. Entonces el álgebra de Nichols $\mathfrak{B}(V)$ de V queda definida por las siguientes propiedades:

- $\mathfrak{B}^0(V) = \Bbbk$,
- $\mathfrak{B}(V)$ es generada por $\mathfrak{B}^1(V)$ como álgebra,
- $\mathfrak{B}^1(V) = V =$ espacio de elementos primitivos de $\mathfrak{B}(V)$,

donde $\mathfrak{B}^n(V)$ denota el espacio homogéneo de grado n.

Claramente, podemos ver a $\mathfrak{B}(V)$ como un cociente del álgebra tensorial $T(V)$ si decretamos que los elementos de V son primitivos, esto es, que la comultiplicación para todo $v \in V$ es $\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$. Existen varias maneras de caracterizar el núcleo de la proyección $T(V) \twoheadrightarrow \mathfrak{B}(V)$, por ejemplo:

- es el máximo ideal generado por elementos de grado ≥ 2 que además es un coideal, [10];
- cada espacio homogéneo de grado n es el núcleo del *simetrizador cuántico* $\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n} s(\sigma)$ donde $s : \mathbb{S}_n \to \mathbb{B}_n$ es la sección de Matsumoto y el grupo de trenza actúa sobre $V^{\otimes n}$ mediante la trenza de la categoría [47];
- es la intersección de los núcleos de las casi-derivaciones ∂_v para todo $v \in V$ [39];
- es el radical de cierta forma bilineal sobre $T(V)$ simétrica y compatible con la estructura de Hopf en $T(V)$ [32].

Calcular explícitamente este núcleo y decidir si el álgebra es de dimensión finita o no es un problema muy difícil. A nosotros nos interesa resolverlo porque utilizando el Método del Levante [10] esta información nos permite aproximarnos a la clasificación de las álgebras de Hopf de dimensión finita con corradical H.

El caso en el que más se avanzó en resolver este problema es cuando H es el álgebra de un grupo abeliano: Heckenberger [30] clasificó las álgebras de Nichols de dimensión finita y Andruskiewitsch y Schneider [11] clasificaron las álgebras de Hopf punteadas sobre grupos abelianos de orden coprimo con 210. Además, Angiono [9] dio una presentación por generadores y relaciones de las álgebras de Nichols y con esto probó una conjetura de Andruskiewitsch y Schneider afirmando que toda álgebra de Hopf punteada de dimensión finita sobre un grupo abeliano es generada por elementos de tipo grupo y casi-primitivos.

Las álgebras de Nichols sobre grupos abelianos tienen una gran similitud con el álgebra envolvente de un álgebra de Lie[2], lo que permitió desarrollar herramientas de la teoría de Lie en el contexto Nichols. Por ejemplo: encontrar bases PBW [36], definir el grupoide de

[2]Más específicamente, con su parte positiva, que de hecho se proyecta sobre los primeros ejemplos de álgebras de Nichols.

Weyl y sistemas de raíces generalizados [30] o estudiar la teoría de representaciones usando los pesos [45].

En cambio, el contexto no abeliano es muy diferente. Si bien algunas de las herramientas antes citadas se han podido generalizar y aplicar cuando V es la suma de dos o más submódulos simples[3], falta mucha información para el caso en que V es simple. Más aún, hay pocos ejemplos de álgebras de Nichols de dimensión finita con V simple y en cambio se sabe que para $\mathbb{A}_n$, $n \geq 5$, y la mayor parte de los grupos simples esporádicos todas sus álgebras de Nichols son de dimensión infinita [1, 2, 20], y gran parte de las álgebras de Nichols sobre grupos simples de tipo Lie también son de dimensión infinita [7]; se puede leer allí sobre el estado del problema y encontrar más referencias al respecto.

2.1. álgebras de Nichols sobre grupos no abelianos. Los módulos simples en la categoría de módulos de Yetter–Drinfeld sobre un grupo G no abeliano son parametrizados por clases de conjugación y representaciones de los centralizadores de un elemento de la misma [4]. Equivalentemente, uno puede obviar la estructura de Yetter–Drinfeld y considerar racks y 2-cociclos para estudiar el álgebra de Nichols sobre un V dado, ver [6].

Los pocos ejemplos de álgebras de Nichols sobre grupos no abelianos de dimensión finita son:

1. Las asociadas a clases de conjugación $\mathscr{O}_m^n$ de m-ciclos en el grupo simétrico $\mathbb{S}_n$:
   a) $\mathfrak{B}(\mathscr{O}_2^n, \mathrm{sgn})$ con la representación signo sgn para $n = 3,4,5$;
   b) $\mathfrak{B}(\mathscr{O}_2^n, \chi)$ con la representación $\chi = \varepsilon \times \mathrm{sgn}$ para $n = 3,4,5$;
   c) $\mathfrak{B}(\mathscr{O}_4^4, \mathrm{sgn})$ con la representación signo sgn,
   las cuales se realizan en la correspondiente categoría ${}^{\Bbbk\mathbb{S}_n}_{\Bbbk\mathbb{S}_n}\mathscr{YD}$. Para $n \geq 6$, se sabe que las únicas álgebras de Nichols que pueden llegar a tener dimensión finita son $\mathfrak{B}(\mathscr{O}_2^n, \mathrm{sgn})$ y $\mathfrak{B}(\mathscr{O}_2^n, \chi)$ [15].
2. Las asociadas a racks afines:
   a) cinco con 2-cociclo constante -1 sobre los racks $(\mathbb{F}_4, \omega)$, $(\mathbb{F}_5, 2)$, $(\mathbb{F}_5, 3)$, $(\mathbb{F}_7, 3)$ y $(\mathbb{F}_7, 5)$ [5, 6];
   b) una con 2-cociclo no constante sobre el rack $(\mathbb{F}_4, \omega)$ [31].

Estos ejemplos se pueden realizar sobre productos semidirectos de grupos.

3. Las álgebras de Fomin–Kirillov en el contexto de las álgebras de Nichols

Consideremos el espacio vectorial V con base $\{x_{(ij)} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$, es decir indexada por las trasposiciones en $\mathbb{S}_n$. El centralizador de (12) en $\mathbb{S}_n$ es $C_{(12)} = \langle (ij) \mid 3 \leq i < j \leq n \rangle \times \langle (12) \rangle$. Entonces los módulos de Yetter–Drinfeld sobre $\mathbb{S}_n$ que dan lugar a las álgebras de Nichols de dimensión finita listadas en (1.a) y (1.b) son construidos sobre V de la siguiente manera:

$$\text{la acción es } g \cdot x_{(ij)} = \rho(g) x_{g(ij)g^{-1}},$$
$$\text{la coacción es } \delta(x_{(ij)}) = (ij) \otimes x_{(ij)},$$

donde la representación ρ de $C_{(12)}$ puede ser el signo $\mathrm{sgn} : \mathbb{S}_n \to \{\pm 1\}$ de la permutación o bien $\chi = \varepsilon \times \mathrm{sgn}$, donde ε es la representación trivial. Estos módulos de Yetter–Drinfeld son denotados $M(\mathscr{O}_2^n, \mathrm{sgn})$ y $M(\mathscr{O}_2^n, \chi)$, respectivamente.

[3] En [8] se generalizan las nociones de grupoide de Weyl y sistemas de raíces de [30], y en [33] se clasifican las álgebras de Nichols sobre grupos no abelianos con V igual a la suma de dos submódulos simples.

Milinski y Schneider [39] notaron que el álgebra de Fomin–Kirillov es una álgebra de Hopf trenzada en la categoría ${}^{\Bbbk\mathbb{S}_n}_{\Bbbk\mathbb{S}_n}\mathcal{YD}$. Más aún, probaron que el mapa

$$\mathcal{FK}_n \longrightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{O}_2^n, \chi), \quad [ij] \mapsto x_{(ij)}$$

define un epimorfismo de álgebras trenzadas y que es un isomorfismo para $n = 3$ y 4; Graña [25] comprobó el isomorfismo para $n = 5$. Para $n \geq 6$ no se sabe si este epimorfismo es un isomorfismo.

Los autores también mostraron que $\mathcal{FK}_n$ es un $\mathcal{FK}_{n-1}$-módulo libre. Más aún, existe una subálgebra K_n tal que la restricción de la multiplicación

$$K_n \otimes \mathcal{FK}_{n-1} \longrightarrow \mathcal{FK}_n, \quad k \otimes x \mapsto kx$$

es un isomorfismo lineal. Esto se desprende de un teorema más general de [39] al estilo del Teorema de Radford [44] para álgebras de Hopf con proyecciones. Esta descomposición también fue probada de otra manera por [22].

Las subálgebras K_n y $\mathcal{FK}_{n-1}$ están bien determinadas:

$$\mathcal{FK}_{n-1} = \langle [ij] \mid 1 \leq i < j \leq n-1 \rangle,$$
$$K_n = \langle [1n], \ldots, [(n-1)n] \rangle.$$

3.1. Dimensiones y bases tipo PBW. Las dimensiones de las tres primeras álgebras de Fomin–Kirillov son

$$\dim \mathcal{FK}_3 = 12, \quad \dim \mathcal{FK}_4 = 576, \quad \dim \mathcal{FK}_5 = 8294400.$$

Se puede ver una demostración de las dos primeras igualdades en [39]. La última fue probada por Jan-Erik Roos con el paquete Bergman, ver [25].

En [25] Graña dio unas bases lineales muy singulares para los ejemplos de álgebras de Nichols de dimensión finita sobre grupos no abelianos. La peculiaridad de estas bases es su parecido con las bases PBW que poseen las álgebras de Nichols sobre grupos abelianos, por lo que sería muy interesante y de gran utilidad poder entenderlas en profundidad y generalizarlas.

Por ejemplo, la base para $\mathcal{FK}_n$ ($n = 3, 4, 5$) está formada por todos los elementos de la forma

$$\beta_{(12)}\beta_{(23)}\beta_{(13)} \cdots \beta_{(1n)}\beta_{(2n)} \cdots \beta_{((n-1)n)}$$

donde cada $\beta_{(ij)}$ pertenece a un conjunto $B_{(ij)}$ de monomios iniciados por $[ij]$ dados explícitamente:

$$B_{(ij)} = \{1, [ij], [ij] \cdots, \ldots\}.$$

Las cardinalidades de estos conjuntos no son necesariamente iguales, y no son dados de una forma concisa sino mediante la lista explícita.

3.2. Álgebras de Nichols sobre grupos de Coxeter. El trabajo [39] no solo se concentra en las álgebras de Fomin–Kirillov. Allí también son estudiadas las álgebras de Nichols asociadas a la clase de conjugación de los generadores de un grupo de Coxeter en general. Los autores, valiéndose de la combinatoria y de las propiedades conocidas de los grupos de Coxeter, fueron capaces de encontrar relaciones que valen en este tipo de álgebras de Nichols, caracterizar ciertos subespacios y la subálgebra generada por los generadores asociados a los generadores del grupo de Coxeter.

Bazlov en [16] hace uso de esta presentación de [39] para generalizar el trabajo de Fomin–Kirillov a otros grupos de Coxeter tal como es sugerido en [21, p. 6]. Explícitamente, sea G un grupo de Lie semisimple con grupo de Weyl W y B el subgrupo de Borel de G. La variedad de bandera de G es el espacio homogéneo G/B y el anillo de cohomología de G/B es el álgebra de coinvariantes

$$S_W = S(\mathfrak{h})/I_W,$$

donde $S(\mathfrak{h})$ es el álgebra simétrica de la subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ y I_W es el ideal generado por los polinomios W-invariantes.

Sea V_W el módulo de Yetter–Drinfeld sobre W generado por los símbolos $[\alpha]$, con α raíz de W y sujetos a la condición $[-\alpha] = -[\alpha]$. La W-acción es dada por $w[\alpha] = [w\alpha]$ para todo $w \in W$. Además, consideremos la nilcoxeter álgebra N_W; esta es definida mediante generadores x_α, α raíz simple de W, y relaciones como las del grupo W pero igualadas a cero[4].

Entonces, lo que logra hacer Bazlov [16, Theorems 5.1, 6.1] es encontrar morfismos inyectivos de álgebras

$$S_W \to \mathfrak{B}(V_W) \quad \text{y} \quad N_W \to \mathfrak{B}(V_W).$$

Además, el autor realiza la acción de N_W sobre S_W mediante operadores de diferencias divididas

$$\partial_\alpha : S(\mathfrak{h}) \longrightarrow S(\mathfrak{h}), \quad \partial_\alpha(f) = \frac{f - s_\alpha f}{\alpha}$$

dentro del álgebra de Nichols $\mathfrak{B}(V_W)$.

3.3. Las álgebras de Nichols sobre $\mathbb{S}_n$ son equivalentes por twist. Vendramin [50] demostró que las álgebras $\mathfrak{B}(\mathscr{O}_2^n, \chi)$ y $\mathfrak{B}(\mathscr{O}_2^n, \mathrm{sgn})$ son equivalentes por twist para todo $n \in \mathbb{N}$. Más aún, $\mathfrak{B}(\mathscr{O}_4^4, \mathrm{sgn})$, la otra álgebra de Nichols de dimensión finita sobre $\mathbb{S}_4$, $\mathfrak{B}(\mathscr{O}_2^4, \chi)$ y $\mathfrak{B}(\mathscr{O}_2^4, \mathrm{sgn})$ también son equivalentes por twist. Esto es importante porque gracias a un resultado de [3] se deduce que las series de Hilbert de estas álgebras son iguales.

3.4. Subálgebras de $\mathscr{FK}_n$. En un interesante trabajo Blasiak, Liu y Meszaros [17] analizan ciertas subálgebras de $\mathscr{FK}_n$ obteniendo sorprendentes propiedades para estas. Los autores consideran los generadores $[ij]$ como las aristas de un grafo completo de n vértices. Entonces las subálgebras que ellos contemplan son las subálgebras $\mathscr{E}_G$ generadas por los subgrafos G del grafo completo de n vértices.

Estas subálgebras comparten dos importantes propiedades con las álgebras de Nichols. Específicamente, si $\mathscr{FK}_G$ es de dimensión finita entonces:

- La serie de Hilbert es simétrica, es decir $\mathscr{E}_G$ tiene un grado máximo t y las dimensiones d_n de los espacios homogéneos de grado n satisfacen $d_n = d_{t-n}$.
- Si H es un subgrafo de G entonces $\mathscr{E}_G$ es un $\mathscr{E}_H$-módulo libre.

A pesar de que los autores son capaces de calcular la dimensión de varias subálgebras $\mathscr{E}_G$, por ejemplo las correspondientes a subgrafos del tipo Dynkin, se topan con 7 subgrafos de 6 vértices para los cuales les es imposible hacerlo, como ocurre con $\mathscr{FK}_6$, y conjeturan que las correspondientes subálgebras son de dimensión infinita; ver [17, Figure 10].

4. El álgebra de Fomin–Kirillov $\mathscr{FK}_3$

Durante esta sección nos concentraremos en $\mathscr{FK}_3$, que es el álgebra de Nichols más pequeña que existe sobre un grupo no abeliano y sobre la que más información tenemos.

[4]Recordar que W es un grupo de Coxeter generado por elementos s_α, α raíz simple de W, sujetos a relaciones $s_\alpha^2 = 1$ y $(s_\alpha s_{\alpha'})^{m_{\alpha,\alpha'}} = 1$.

Sea $V = M(\mathscr{O}_2^3, \mathrm{sgn})$ el módulo de Yetter–Drinfeld sobre $\mathbb{S}_3$ de acuerdo a la definición de la sección anterior. El álgebra de Nichols correspondiente $\mathfrak{B}(V)$ es generada por $x_{(12)}, x_{(23)}$ y $x_{(13)}$ sujetos a las relaciones

$$x_{(12)}^2 = x_{(23)}^2 = x_{(13)}^2 = 0,$$
$$x_{(12)}x_{(23)} + x_{(23)}x_{(13)} + x_{(13)}x_{(12)} = 0,$$
$$x_{(23)}x_{(12)} + x_{(13)}x_{(23)} + x_{(12)}x_{(13)} = 0.$$

En la literatura es común encontrar a $\mathscr{F}\mathscr{K}_3$ presentada como esta álgebra de Nichols, por lo que nosotros también usaremos esta identificación. Notar que $M(\mathscr{O}_2^3, \mathrm{sgn}) = M(\mathscr{O}_2^3, \chi)$, porque $C_{(12)} = \langle (12) \rangle$, lo que induce el isomorfismo $\mathscr{F}\mathscr{K}_3 \simeq \mathfrak{B}(V)$.

4.1. Cohomología de $\mathscr{F}\mathscr{K}_3$. Conocer el álgebra de Yoneda $E(H) = \mathrm{Ext}_H^*(\Bbbk, \Bbbk)$ de un álgebra de Hopf cobró interés a partir de los trabajos de Quillen, Avrunin, Scott y Carlson [43, 12, 18], entre otros, quienes introdujeron métodos geométricos para estudiar la teoría de representaciones de un álgebra de grupo a partir de asignarle a cada G-módulo M cierto cerrado $V_G(M)$, llamado "variedad de soporte", en el espectro del álgebra de Yoneda del grupo G. Esta asignación satisface interesantes propiedades, como por ejemplo:

- $V_G(M \otimes N) = V_G(M) \cap V_G(N)$.
- $V_G(M)$ es la unión disjunta de dos cerrados W_1 y W_2 si y solo si $M = M_1 \oplus M_2$ con $W_i = V_G(M_i)$.

El primer paso para poder desarrollar estos métodos es probar que la correspondiente álgebra de Yoneda es finitamente generada. Esto fue probado por Golod, Venkov y Evens para grupos [28, 19, 51]; Friedlander y Suslin para álgebras de Hopf coconmutativas [23]; Ginzburg y Kumar para grupos cuánticos pequeños [34]; Gordon para álgebra de funciones sobre grupos cuánticos [29]; Mastnak, Pevtsova, Schauenburg y Witherspoon para álgebras de Nichols sobre grupos abelianos y sus levantamientos [37].

Junto a Dragos Ştefan [48] calculamos el álgebra de Yoneda $B = \mathfrak{B}(V)$, en particular probamos que es finitamente generada. Este es el primer resultado de este tipo que se obtiene para álgebras de Nichols sobre un grupo no abeliano.

Sea S_V el álgebra simétrica de V en la categoría ${}^{\Bbbk\mathbb{S}_3}_{\Bbbk\mathbb{S}_3}\mathscr{Y}\mathscr{D}$, esto es

$$S_V = T(V)/\langle x_{(ij)} \otimes x_{(lk)} - c(x_{(ij)} \otimes x_{(lk)}) \mid (ij), (lk) \, \text{trasposiciones en} \, \mathbb{S}_3 \rangle,$$

donde c es la trenza de la categoría. Notar que por [37] el álgebra de Yoneda de un álgebra de Nichols es conmutativa con respecto a la trenza de la categoría de Yetter–Drinfeld. Nuestro principal resultado es el siguiente.

Teorema 4.1. *Sea* $E(B) = \mathrm{Ext}_B^*(\Bbbk, \Bbbk)$ *el álgebra de Yoneda del álgebra de Nichols* $B = \mathfrak{B}(V)$. *Entonces existe un isomorfismo de álgebras graduadas*

$$E(B) \simeq S_V[X]$$

con $\deg x_{(ij)} = 1$ *y* $\deg X = 4$.

También obtuvimos el álgebra de Yoneda de las bosonizaciones $\mathfrak{B}(V)\#\Bbbk\mathbb{S}_3$ y $\mathfrak{B}(V)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$ como los invariantes $E(B)^{\Bbbk\mathbb{S}_3}$ y $E(B)^{\Bbbk^{\mathbb{S}_3}}$ [48, Theorems 4.19, 4.22].

La estrategia para demostrar el isomorfismo $E(B) \simeq S_V[X]$ comienza por recordar la descomposición dada por [39] para $\mathscr{F}\mathscr{K}_3$:

$$B = A \otimes_\sigma R, \quad \text{con } A = \langle x_{(12)}, x_{(23)} \rangle \text{ y } R = \langle x_{(13)} \rangle.$$

Entonces podemos ver esta descomposición como un producto cruzado donde A es una subálgebra normal y aplicar la sucesión espectral de Cartan–Eilenberg para este tipo de descomposiciones:

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_R^p(\Bbbk, \mathrm{Ext}_A^p(\Bbbk,\Bbbk)) \Longrightarrow \mathrm{Ext}_B^{p+q}(\Bbbk,\Bbbk).$$

Luego dividimos la prueba en tres pasos:

1. Calcular $E(A) = \mathrm{Ext}_A^p(\Bbbk,\Bbbk)$.
2. Calcular la acción de R sobre $E(A)$.
3. Calcular el límite de la sucesión espectral $E_2^{p,q}$.

A continuación explicaremos brevemente estos pasos.

4.1.1. El álgebra de Yoneda de A. El álgebra A es exactamente la nilcoxeter álgebra correspondiente al diagrama A_2, es decir

$$A = \langle x_{(12)}, x_{(23)} \mid x_{(12)}^2, x_{(23)}^2, x_{(12)}x_{(23)}x_{(12)} - x_{(23)}x_{(12)}x_{(23)} \rangle.$$

Para simplificar la notación decretamos $a = x_{(12)}$, $b = x_{(23)}$, y sea ρ_t la multiplicación a derecha por el elemento $t \in A$. Gracias a las relaciones que definen a A construimos el siguiente complejo doble de A-módulos.

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "\rho_b"] & \vdots \arrow[d, "\rho_{-a}"] & \vdots \arrow[d, "\rho_b"] & \vdots \arrow[d, "\rho_{-a}"] & \vdots \arrow[d, "\rho_{ba}"] & \\
A \arrow[d, "\rho_b"] & A \arrow[l, "\rho_{ba}"'] \arrow[d, "\rho_{-a}"] & A \arrow[l, "\rho_{ab}"'] \arrow[d, "\rho_b"] & A \arrow[l, "\rho_{ba}"'] \arrow[d, "\rho_{ab}"] & A \arrow[l, "\rho_b"'] \arrow[d, "\rho_{ab}"] & \cdots \arrow[l, "\rho_b"'] \\
A \arrow[d, "\rho_b"] & A \arrow[l, "\rho_{ba}"'] \arrow[d, "\rho_{-a}"] & A \arrow[l, "\rho_{ab}"'] \arrow[d, "\rho_{ba}"] & A \arrow[l, "\rho_{-a}"'] \arrow[d, "\rho_{ba}"] & A \arrow[l, "\rho_{-a}"'] \arrow[d, "\rho_{ba}"] & \cdots \arrow[l, "\rho_{-a}"'] \\
A \arrow[d, "\rho_b"] & A \arrow[l, "\rho_{ba}"'] \arrow[d, "\rho_{ab}"] & A \arrow[l, "\rho_b"'] \arrow[d, "\rho_{ab}"] & A \arrow[l, "\rho_b"'] \arrow[d, "\rho_{ab}"] & A \arrow[l, "\rho_b"'] \arrow[d, "\rho_{ab}"] & \cdots \arrow[l, "\rho_b"'] \\
A & A \arrow[l, "\rho_{-a}"] & A \arrow[l, "\rho_{-a}"] & A \arrow[l, "\rho_{-a}"] & A \arrow[l, "\rho_{-a}"] & \cdots \arrow[l, "\rho_{-a}"]
\end{tikzcd}$$

Más aún, probamos que el complejo total asociado determina una resolución libre minimal para $\Bbbk$. Por lo tanto,

$$\dim E^n(A) = n + 1.$$

Trabajando un poco más pudimos encontrar los generadores del álgebra y sus relaciones, obteniendo que

$$E(A) = \langle x, y, z \mid xy, yx, zx + yz, xz + zy \rangle$$

con $\deg x = 1 = \deg y$ y $\deg z = 2$ [48, Theorem 3.3].

4.1.2. La acción de R sobre E(A). Calcular esta acción fue lo más complejo pero pudimos desarrollar un método general que se aplica a otros productos cruzados. La idea del método se basa en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A_+^{(n)} \otimes R \arrow[r, "d_n^i \otimes R"] \arrow[d, "A\otimes\sigma_n"'] & A \otimes A_+^{(n-1)} \otimes R \arrow[d, "A\otimes\sigma_{n-1}"] \\
A \otimes R \otimes A_+^{(n)} \arrow[r, "\partial_n^i"'] & A \otimes R \otimes A_+^{(n-1)}
\end{tikzcd}$$

donde las mapas horizontales corresponden a dos resoluciones de Bar ligeramente distintas y los mapas verticales son inducidos por el twist que define el producto cruzado. Esto nos permite transportar acciones de una resolución a otra para así inducir una acción de R sobre una a A-resolución de $\Bbbk$, ver [48, Subsection 2.10].

4.1.3. El límite de la sucesión espectral. Las dimensiones de los espacios $E^n(B)$ son dadas por la sucesión $\{N_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de los enteros congruentes a $1,3,5$ y 0 módulo 6, es decir

$$\{N_n\}_{n\geq 0} = \{1,3,5,6,7,9,11,12,13,\dots\}.$$

Esto fue conjeturado por Solberg [49] a partir de cálculos computacionales. Para demostrar la validez de la conjetura, lo primero que hicimos fue ver que

$$E^n(B) \leq \sum_{p+q=n} E_2^{p,q} = N_n,$$

usando el conocimiento explícito de la acción de R sobre $E(A)$.

Luego probamos que $E^1(B)$ genera una subálgebra isomorfa a S_V; para esto construimos morfismos $E(B) \to \Bbbk$ de álgebras apropiados para demostrar que se puede encontrar una base de S_V dentro de $E(B)$ [48, Proposition 4.6].

Por último, pudimos comprobar la existencia del cuarto generador de $E(B)$, el correspondiente a X, estudiando la acción del grupo $\mathbb{S}_3$ sobre la B-resolución de Bar de $\Bbbk$. Aquí desarrollamos una técnica con mucha generalidad, ver [48, Subsection 2.9]. Aunque no pudimos calcular explícitamente este generador, saber que existía fue suficiente para argüir que $E^n(B) = N_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y terminar de mostrar el isomorfismo del Teorema 4.1.

4.2. Clasificación de álgebras de Hopf asociadas a $\mathscr{FK}_3$. Siguiendo el Método del Levante se ha podido clasificar las álgebras de Hopf punteadas y copunteadas sobre $\mathbb{S}_3$[5] de dimensión finita. Explícitamente:

1. *$\mathscr{FK}_3$ es la única álgebra de Nichols sobre $\mathbb{S}_3$ de dimensión finita*:
   a) [39] probó que $\mathscr{FK}_3$ es el álgebra de Nichols de V y es de dimensión finita.
   b) [15] probó que el álgebra de Nichols de cualquier otro módulo simple en ${}^{\Bbbk\mathbb{S}_3}_{\Bbbk\mathbb{S}_3}\mathscr{YD}$ es de dimensión infinita.
   c) [8] probó que el álgebra de Nichols correspondiente a sumas de V es de dimensión infinita.
2. *Generación en grado* 1: cualquier álgebra de Hopf punteada sobre $\mathbb{S}_3$ de dimensión finita es generada por el primer término de la filtración corradical, y la trenza infinitesimal es isomorfa a V en la categoría ${}^{\Bbbk\mathbb{S}_3}_{\Bbbk\mathbb{S}_3}\mathscr{YD}$; esto sigue de 1 y [5].
3. *Levantamientos de $\mathscr{FK}_3$*:
   a) Las álgebras de Hopf punteadas sobre $\mathbb{S}_3$ de dimensión finita son cocientes de $T(V)\#\Bbbk\mathbb{S}_3$ [5].
   b) Las álgebras de Hopf copunteadas sobre $\mathbb{S}_3$ de dimensión finita son cocientes de $T(V)\#\Bbbk\mathbb{S}_3$ [13].

[5] Con corradical el álgebra de grupo $\Bbbk\mathbb{S}_3$ y el álgebra de funciones $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$, respectivamente.

Algunas observaciones:

- Los pasos 1 y 2 valen para el caso copunteado porque las categorías trenzadas ${}^{\Bbbk\mathbb{S}_3}_{\Bbbk\mathbb{S}_3}\mathscr{YD}$ y ${}^{\Bbbk^{\mathbb{S}_3}}_{\Bbbk^{\mathbb{S}_3}}\mathscr{YD}$ son equivalentes.
- Los pasos 1, 2 y 3.a están resueltos para el caso punteado sobre $\mathbb{S}_4$ y $\mathbb{S}_5$ pero no para el caso copunteado.
- En [27] clasificamos todas las álgebras de Hopf punteadas o copunteadas (para cualquier grupo) que son levantamientos de $\mathscr{FK}_3$.

A continuación daremos las construcciones de los cocientes de (3.a) y (3.b).

4.2.1. Levantamientos sobre $\Bbbk\mathbb{S}_3$. Recordemos que $T(V)$ y $\Bbbk\mathbb{S}_3$ son subálgebras de $T(V)\#\Bbbk\mathbb{S}_3$ y la regla de conmutación entre los elementos de $T(V)$ y $\Bbbk\mathbb{S}_3$ es dada por

$$gx_{(ij)} = \operatorname{sgn}(g)x_{g(ij)g^{-1}}g$$

para toda trasposición (ij) y $g \in \mathbb{S}_3$, mientras que la comultiplicación en estos elementos es

$$\Delta(x_{(ij)}) = x_{(ij)} \otimes 1 + (ij) \otimes x_{(ij)} \quad \text{y} \quad \Delta(g) = g \otimes g.$$

Para cada $\lambda \in \Bbbk$, consideremos los ideales de Hopf $\mathscr{I}_\lambda$ de $T(V)\#\Bbbk\mathbb{S}_3$ generados por

$$\begin{gathered} x_{(12)}^2, \quad x_{(23)}^2, \quad x_{(13)}^2, \\ x_{(12)}x_{(23)} + x_{(23)}x_{(13)} + x_{(13)}x_{(12)} - \lambda(1-(123)), \\ x_{(23)}x_{(12)} + x_{(13)}x_{(23)} + x_{(12)}x_{(13)} - \lambda(1-(132)). \end{gathered}$$

Sea $\mathscr{A}_\lambda$ el correspondiente cociente (ver [5]):

$$\mathscr{A}_\lambda = T(V)\#\Bbbk\mathbb{S}_3/\mathscr{I}_\lambda.$$

Entonces toda álgebra de Hopf punteada de dimensión finita sobre $\mathbb{S}_3$ es isomorfa a una, y solo una, de las siguientes tres:

$$\Bbbk\mathbb{S}_3, \quad \mathscr{A}_0, \quad \mathscr{A}_1.$$

Además, vale que $\mathscr{A}_0 = \mathfrak{B}(V)\#\Bbbk\mathbb{S}_3$ y $\mathscr{A}_1 \simeq \mathscr{A}_\lambda$ para todo $\lambda \neq 0$.

Notar que las relaciones que definen $\mathscr{A}_\lambda$ son las mismas de $\mathfrak{B}(V)$ pero deformadas sobre $\Bbbk\mathbb{S}_3$. Más aún, por [26] sabemos que las álgebras de Hopf $\mathscr{A}_\lambda$ son todas deformaciones por cociclo unas de otras.

4.2.2. Levantamientos sobre $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$. Sea $\{\delta_g \mid g \in \mathbb{S}_3\}$ la base dual a la base canónica de $\mathbb{S}_3$. La regla de conmutación entre los elementos de $T(V)$ y $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$ es dada por

$$\delta_g x_{(ij)} = x_{(ij)}\delta_{(ij)g}$$

para toda trasposición (ij) y $g \in \mathbb{S}_3$, mientras que la comultiplicación en estos elementos es

$$\Delta(x_{(ij)}) = x_{(ij)} \otimes 1 + \sum_{t\in\mathbb{S}_3} \operatorname{sgn}(t)\delta_t \otimes x_{t^{-1}(ij)t} \quad \text{y} \quad \Delta(\delta_g) = \sum_{t\in\mathbb{S}_3} \delta_t \otimes \delta_{t^{-1}g}.$$

Consideremos el conjunto

$$\mathfrak{A} = \{(a_{(12)}, a_{(23)}, a_{(13)}) \in \Bbbk^3 \mid a_{(12)} + a_{(23)} + a_{(13)} = 0\}.$$

El grupo $\Bbbk^* \times \mathbb{S}_3$ actúa sobre $\mathfrak{A}$ vía

$$(\mu, g)\cdot(a_{(12)}, a_{(23)}, a_{(13)}) = \mu(a_{g(12)g^{-1}}, a_{g(23)g^{-1}}, a_{g(13)g^{-1}}).$$

Para cada $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}$ denotamos por $\mathscr{I}_{\mathbf{a}}$ al ideal de Hopf de $T(V)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$ generado por

$$x_{(ij)}^2 - \sum_{g \in \mathbb{S}_3} (a_{(ij)} - a_{g^{-1}(ij)g})\delta_g \quad \text{para toda trasposición } (ij) \in \mathbb{S}_3,$$

$$x_{(12)}x_{(23)} + x_{(23)}x_{(13)} + x_{(13)}x_{(12)},$$

$$x_{(23)}x_{(12)} + x_{(13)}x_{(23)} + x_{(12)}x_{(13)},$$

y el correspondiente cociente lo denotamos (ver [13, 14])

$$\mathscr{A}_{\mathbf{a}} = T(V)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_3}/\mathscr{I}_{\mathbf{a}}.$$

Entonces toda álgebra de Hopf copunteada sobre $\mathbb{S}_3$ de dimensión finita es isomorfa a

$$\Bbbk^{\mathbb{S}_3} \quad \text{o} \quad \mathscr{A}_{\mathbf{a}}, \text{ para algún } \mathbf{a} \in \mathfrak{A}.$$

Más aún, $\mathscr{A}_{\mathbf{a}} \simeq \mathscr{A}_{\mathbf{b}}$ si y solo si $\mathbf{b} = (\mu, g) \cdot \mathbf{a}$ para algún $(\mu, g) \in \Bbbk^* \times \mathbb{S}_3$.

Al igual que en el caso punteado, las relaciones que definen a $\mathscr{A}_{\mathbf{a}}$ son las mismas del álgebra de Nichols pero deformadas sobre $\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$ y son todas deformaciones por cociclos unas de otras [14]. En [14] también se puede encontrar un estudio de las representaciones de estas álgebras y en [41] de las representaciones del doble de Drinfeld de $\mathfrak{B}(V)\#\Bbbk^{\mathbb{S}_3}$.

REFERENCIAS

[1] N. Andruskiewitsch, Fantino, F., Graña, Vendramín, L., *Finite-dimensional pointed Hopf algebras with alternating groups are trivial*, Ann. Mat. Pura Appl. **190** (2011), 225–245. MR 2786171.

[2] N. Andruskiewitsch, F. Fantino, M. Graña, L. Vendramín, *Pointed Hopf algebras over the sporadic simple groups*, J. Algebra **325** (2011), 305–320. MR 2745542.

[3] N. Andruskiewitsch, F. Fantino, G. A. García, L. Vendramin, *On Nichols algebras associated to simple racks*, Contemp. Math. **537** (2011), 31–56 MR 2799090.

[4] N. Andruskiewitsch, M. Graña, *Braided Hopf algebras over non abelian finite groups*, Bol. Acad. Ciencias (Córdoba) **63** (1999), 45–78. MR 1714540.

[5] N. Andruskiewitsch, M. Graña, *Examples of liftings of Nichols algebras over racks*, Théories d'homologie, représentations et algèbres de Hopf. AMA Algebra Montp. Announc. 2003, Paper 1, 6 pp. (electronic). MR 2065444.

[6] N. Andruskiewitsch, M. Graña, *From racks to pointed Hopf algebras*, Adv. Math. **178** (2003), 177–243. MR 1994219.

[7] N. Andruskiewitsch, G. Carnovale, G. A. García, *Finite-dimensional pointed Hopf algebras over finite simple groups of Lie type I. Non-semisimple classes in* $\mathbf{PSL}_n(q)$, J. Algebra **442** (2015), 36–65. MR 3395052.

[8] N. Andruskiewitsch, I. Heckenberger and H.-J. Schneider, *The Nichols algebra of a semisimple Yetter–Drinfeld module*, Amer. J. Math. **132** (2010). MR 2766176.

[9] I. Angiono, *On Nichols algebras of diagonal type*, J. Reine Angew. Math. **683** (2013), 189–251. MR 3181554.

[10] N. Andruskiewitsch, H. J. Schneider, *Pointed Hopf algebras*, New directions in Hopf algebras, 1–68, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 43, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002. MR 1913436.

[11] N. Andruskiewitsch, H. J. Schneider, *On the classification of finite-dimensional pointed Hopf algebras*, Ann. of Math. **171** (2010), 375–417. MR 2630042.

[12] G. Avrunin, L. Scott, *Quillen stratification for modules*, Invent. Math. **66** (1982), 277–286. MR 0656624.

[13] N. Andruskiewitsch, C. Vay, *Finite dimensional Hopf algebras over the dual group algebra of the symmetric group in three letters*, Comm. Algebra **39** (2011), 4507–4517. MR 2863448.

[14] N. Andruskiewitsch, C. Vay, *On a family of Hopf algebras of dimension* 72, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **19** (2012), 415–443. MR 3027352.

[15] N. Andruskiewitsch, S. Zhang, *On pointed Hopf algebras associated to some conjugacy classes in* $\mathbb{S}_n$, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 2723–2731. MR 2317945.

[16] Y. Bazlov, *Nichols–Woronowicz algebra model for Schubert calculus on Coxeter groups*, J. Algebra **297** (2006), 372–399. MR 2209265.

[17] J. BLASIAK, R. LIU, C. MESZAROS, *Subalgebras of the Fomin–Kirillov algebra*, arXiv:1310.4112 [math.QA].

[18] J. CARLSON, *The varieties and cohomology ring of a module*, J. Algebra **85** (1983), 104–143. MR 0723070.

[19] L. EVENS, *The cohomology ring of a finite group*, Trans. Amer. Math. Soc. **101** (1961), 224–239. MR 0137742.

[20] F. FANTINO, L. VENDRAMÍN, *On twisted conjugacy classes of type D in sporadic simple groups*, Contemp. Math. **585** (2013) 247–259. MR 3077241.

[21] S. FOMIN, A. N. KIRILLOV, *Quadratic algebras, Dunkl elements, and Schubert calculus*, Advances in geometry, 147–182, Progr. Math., 172, Birkhäuser Boston, MR 1667680.

[22] S. FOMIN, C. PROCESI, *Fibered quadratic Hopf algebras related to Schubert calculus*, J. Algebra **230** (2000), 174–183. MR 1774762.

[23] E. M. FRIEDLANDER, A. SUSLIN, *Cohomology of finite group schemes over a field*, Invent. Math. **127** (1997), 209–270. MR 1427618.

[24] M. GRAÑA, *On Nichols algebras of low dimension*, New trends on Hopf algebra theory (La Falda, 1999), Contemp. Math. **267** (2000), 111–134. MR 1800709.

[25] M. GRAÑA, *Nichols algebras of nonabelian group type*, preprint available at `http://mate.dm.uba.ar/~lvendram/zoo/`.

[26] G. A. GARCÍA, A. GARCÍA IGLESIAS, *Pointed Hopf algebras over* $\mathbb{S}_4$, Israel J. Math. **183** (2011), 417–444. MR 2811166.

[27] A. GARCÍA IGLESIAS, C. VAY, *Finite-dimensional pointed or copointed Hopf algebras over affine racks*, J. Algebra **397** (2014), 379–406. MR 3119229.

[28] E. GOLOD, *The cohomology ring of a finite p-group* (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR **125** (1959), 703–706. MR 0104720.

[29] I. G. GORDON, *Cohomology of quantized function algebras at roots of unity*, Proc. London Math. Soc. **80** (2000), 337–359. MR 1734320.

[30] I. HECKENBERGER, *Classification of arithmetic root systems*, Adv. Math. **220** (2009), 59–124. MR 2462836.

[31] I. HECKENBERGER, A. LOCHMANN, L. VENDRAMIN, *Nichols algebras with many cubic relations*, Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), 6315–6356. MR 3356939.

[32] G. LUSZTIG, *Introduction to quantum groups*, Birkhäuser, 1993. MR 1227098.

[33] I. HECKENBERGER, L. VENDRAMIN, *The classification of Nichols algebras over groups with finite root system of rank two*, arXiv:1311.2881 [math.QA].

[34] V. GINZBURG, S. KUMAR, *Cohomology of quantum groups at roots of unity*, Duke Math. J. **69** (1993), 179–198. MR 1201697.

[35] C. KASSEL, *Quantum groups*, Graduate Texts in Mathematics, 155, Springer Verlag, Berlin, 1995. MR 1321145.

[36] V. KHARCHENKO, *A quantum analog of the Poincaré-Birkhoff-Witt theorem*. Algebra and Logic **38** (1999), 259–276. MR 1763385.

[37] M. MASTNAK, J. PEVTSOVA, P. SCHAUENBURG, S. WITHERSPOON, *Cohomology of finite dimensional pointed Hopf algebras*, Proc. London Math. Soc. **100** (2010), 377–404. MR 2595743.

[38] K. MÉSZÁROS, G. PANOVA, A. POSTNIKOV, *Schur times Schubert via the Fomin–Kirillov algebra*, Electron. J. Combin. **21** (2014), Paper 1.39, 22 pp. MR 3177534.

[39] A. MILINSKI, H. J. SCHNEIDER, *Pointed indecomposable Hopf algebras over Coxeter groups*, Contemp. Math. **267** (2000), 215–236. MR 1800714.

[40] W. D. NICHOLS, *Bialgebras of type one*, Comm. Algebra **6** (1978), 1521–1552. MR 0506406.

[41] B. POGORELSKY, C. VAY, *Verma and simple modules for non-pointed quantum groups*, arXiv:1409.0438 [math.QA].

[42] A. POSTNIKOV, *On a quantum version of Pieri's formula*, Advances in Geometry, 371–383, Progress in Mathematics, 172, Birkhäuser Boston, 1999. MR 1667687.

[43] D. QUILLEN, *The spectrum of an equivariant cohomology ring. I, II*, Ann. of Math. **94** (1971), 549–572, 573–602. MR 0298694.

[44] D. RADFORD, *The structure of Hopf algebras with a projection*, J. Algebra **92** (1985), 322–347. MR 0778452.

[45] D. RADFORD, H.-J. SCHNEIDER, *On the simple representations of generalized quantum groups and quantum doubles*, J. Algebra **319** (2008), 3689–3731. MR 2407847.

[46] J. E. ROOS, *Some non-Koszul algebras*, Advances in geometry, 385–389, Progr. Math., 172, Birkhäuser Boston, 1999. MR 1667688.
[47] P. SCHAUENBURG, *A characterization of the Borel-like subalgebras of quantum enveloping algebras*, Comm. Algebra **24** (1996), 2811–2823. MR 1396857.
[48] D. ŞTEFAN, C. VAY, *The cohomology ring of the 12–dimensional Fomin–Kirillov algebra.*, Adv. Math. **291** (2016), 584–620. MR 3459024.
[49] Ø. SOLBERG, *Computational aspects of projective resolutions*, in "Nichols algebras and Weyl groupoids", Oberwolfach Rep. **9** (2012), issue 4.
[50] L. VENDRAMIN, *Nichols algebras associated to the transpositions of the symmetric group are twist-equivalent*, Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), 3715–3723 MR 2944712.
[51] B. B. VENKOV, *Cohomology algebras for some classifying spaces*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **127** (1959), 943–944. MR 0108788.

FAMAF-CIEM (CONICET), UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA, MEDINA ALLENDE S/N, CIUDAD UNIVERSITARIA, 5000 CÓRDOBA, REPÚBLICA ARGENTINA.
E-mail: vay@famaf.unc.edu.ar