Conferencias

Análisis asociado a la mejora de la regularidad Besov de soluciones de ecuaciones diferenciales

Hugo Aimar
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (CONICET-UNL)

A partir de la necesidad de incrementar la velocidad de convergencia de métodos de aproximación no lineales en puntos de frontera no regulares para soluciones de ecuaciones en derivadas parciales, se desarrolla una teoría de mejora de regularidad Besov de soluciones. El análisis armónico y real subyacente es muy rico y despliega una gama de problemas que van desde la identificación de fórmulas de valor medio para soluciones hasta la caracterización de espacios funcionales usando wavelets pasando por estimaciones de funciones maximales. Nos proponemos exponer una panorámica de la teoría.

La grassmanniana compatible

Esteban Andruchow
Universidad Nacional de General Sarmiento e IAM-CONICET

Trabajo en colaboración con E. Chiumiento y E. Di Iorio.

Let A be a positive injective operator in a Hilbert space $(H;\langle\,;\,\rangle)$, and denote by $[\,;\,]$ the inner product defined by $A : [f;g] = \langle Af;g\rangle$. A closed subspace $S \subset H$ is called A-compatible if there exists a closed complement for S, which is orthogonal to S with respect to the inner product $[\,;\,]$. Equivalently, if there exists a necessarily unique idempotent operator Q_S such that $R(Q_S) = S$, which is symmetric for this inner product. The compatible Grassmannian Gr_A is the set of all A-compatible subspaces of H. By parametrizing it via the one to one correspondence $S \to Q_S$, this set is shown to be a differentiable submanifold of the Banach space of all operators in H which are symmetric with respect to the form $[\,;\,]$. A Banach–Lie group acts naturally on the compatible Grassmannian, the group of all invertible operators in H which preserve the form $[\,;\,]$.

Un resultado para el multiplicador del cono

Ana Vargas
Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid

En los setenta, C. Fefferman demostró que la convergencia esférica de transformadas de Fourier falla en L^p para $p \neq 2$. Para otras formas de sumación, como la de Bochner–Riesz, el mismo problema está abierto.

En un trabajo conjunto con Sangyuk Lee, hemos considerado una cuestión similar para el cono en lugar de la esfera. Este problema tiene implicaciones sobre las soluciones de la ecuación de ondas. En particular, está conectado con el fenómeno de “regularización” de las soluciones cuando se promedia en tiempo. Demostramos el resultado óptimo en L^3. En nuestro análisis del operador juegan un papel fundamental el Teorema Multilineal de Restricción de Bennett–Carbery–Tao y algunas ideas recientes de Bourgain–Guth.

Mejor aproximación local en espacios L^p

Héctor H. Cuenya
Universidad Nacional de Río Cuarto

En primer lugar se introduce el problema clásico de mejor aproximación local. Esto es, dados k puntos en $\mathbb{R}$ y $n+1 = kq+r$, $0 \leq r < k$, se considera P_ε un mejor aproximante a una función f de L^p desde el subespacio Π^n, de polinomios de grado a lo sumo n, donde la norma L^p se toma sobre una unión de intervalos disjuntos centrados en los puntos dados y de amplitud 2ε. En el caso de que existe el límite de los mejores aproximantes P_ε, cuando ε tiende a cero, éste es llamado *el mejor aproximante local de orden n de f en los k puntos*. Es conocida la existencia del mejor aproximante local bajo ciertas condiciones de diferenciabilidad de la función.

A continuación se extiende el problema de existencia del mejor aproximante local en Π^n, al caso de mejor aproximación simultánea a dos funciones, cuando se considera en $\mathbb{R}^2$ la norma del máximo. Se establecen algunos resultados de existencia y caracterización del mejor aproximante local, tanto para el caso de un punto como de varios puntos.

Para finalizar se establecen condiciones de diferenciabilidad lateral en el sentido de L^p, más débiles que las clásicas, las cuales permiten obtener resultados de existencia del mejor aproximante local a una función en varios puntos.

Sobre el teorema de inmersión de Sobolev para espacios de exponente variable en el régimen crítico

Julián Fernández Bonder
Universidad de Buenos Aires y CONICET

En esta charla estudiaremos el problema de existencia de extremales para la desigualdad de Sobolev en espacios de exponente variable en el régimen crítico. Veremos las diferencias que ocurren en contraposición con los espacios de Sobolev clásicos y daremos algunas aplicaciones a la resolución de problemas de contorno elípticos con crecimiento no estándar.

El operador maximal lateral diádico

Francisco J. Martín-Reyes
Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Ciencias, Universidad de Málaga

Trabajo en colaboración con María Lorente (Universidad de Málaga)

El objetivo principal de la charla es introducir un operador maximal lateral diádico con propiedades similares a las del operador maximal diádico usual. Presentaremos caracterizaciones de las desigualdades con pesos para dicho operador diádico lateral.

Convergencia de series de Dirichlet en espacios de Banach

Daniel Carando
Universidad de Buenos Aires – IMAS CONICET

Trabajo en colaboración con Andreas Defant (Universitaet Oldenburg) y Pablo Sevilla-Peris (Universidad Politécnica de Valencia)

En 1913, Harald Bohr mostró que el ancho de la banda en la que una serie de Dirichlet converge uniformemente pero no absolutamente nunca excede 1/2. Bohnenblust y Hille mostraron en 1931 que el valor 1/2 se alcanza. Una idea fundamental de Bohr fue conectar el estudio de series de Dirichlet con el de funciones holomorfas de infinitas variables. Bohnenblust y Hille dieron el paso final al mostrar una desigualdad que relaciona la suma de potencias de los coeficientes de un polinomio homogéneo (de infinitas variables) con el supremo de este polinomio en la bola unidad de c_0.

Desde hace unos años ha habido un renovado interés en la desigualdad de Bohnenblust y Hille, sus variantes y aplicaciones. Un paso culminante se da en [4], donde se muestra que la desigualdad es *hipercontractiva* (es decir, las constantes involucradas crecen como C^m, donde C es una constante y m es el grado del polinomio). Este resultado permitió resolver problemas que llevaban mucho tiempo abiertos relacionados con series de Dirichlet, constantes de Sidón de polinomios trigonométricos, radios de Bohr, etc.

Por otra parte, también se estudiaron versiones vectoriales de la desigualdad de Bohnenblust y Hille y sus consecuencias [1, 5]. En esta línea, nuestro resultado principal es el siguiente: si X es un espacio con cotipo q, entonces

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} \|c_\alpha\|_X^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_{q,m} \int_{\mathbb{T}^\infty} \| \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha \|_X \, dz \tag{1}$$

para todo polinomio m-homogéneo en c_0 y con valores en X ($\mathbb{T}^\infty$ denota el toro infinito). Este resultado mejora las versiones vectoriales conocidas de la desigualdad, y tiene consecuencias en el estudio de series de Dirichlet y funciones de ciertos espacios de Hardy vectoriales.

En esta charla expondremos el problema desde sus orígenes hasta los resultados más recientes, tratando de clarificar qué nos dice una desigualdad como (1).

Referencias

[1] F. Bombal, D. Pérez-García, I. Villanueva: *Multilinear extensions of Grothendieck's theorem*. Q. J. Math. 55 (2004), no. 4, 441–450,

[2] H. Bohnenblust, E. Hille *On the absolute convergence of Dirichlet series.* Ann. of Math. (2) 32 (1931), no. 3, 600–622.

[3] D. Carando, A. Defant, P. Sevilla-Peris. *Bohr's absolute convergence problem for $\mathcal{H}_p$-Dirichlet series in Banach spaces* (preprint).

[4] A. Defant, L. Frerick, J. Ortega-Cerdà, M. Ounaïes, K. Seip: *The Bohnenblust-Hille inequality for homogeneous polynomials is hyper-contractive* Ann. of Math., 174 (2011), 485–497.

[5] A. Defant, D. García, M. Maestre, D. Pérez-García: *Bohr's strip for vector valued Dirichlet series*. Math. Ann. 342 (2008), no. 3, 533–555.

El método de análisis homotópico en la búsqueda de órbitas periódicas

Walter Reartes
Universidad Nacional del Sur – INMABB

El Método de Análisis Homotópico (HAM, por sus siglas en inglés) es una técnica desarrollada recientemente para hallar aproximaciones explícitas en series de funciones, para ecuaciones diferenciales y de otros tipos. En esta charla se pondrá el énfasis en la búsqueda de soluciones periódicas en sistemas dinámicos modelados por ecuaciones diferenciales ordinarias. En la primera parte se presentarán resultados clásicos sobre soluciones periódicas. Luego se mostrará la implementación del HAM para resolver problemas de este tipo. Finalmente se mostrarán algunos resultados obtenidos para ecuaciones diferenciales con retardo.

Comunicaciones de Álgebra

Extensiones galoisianas para grupos cíclicos y para grupos abelianos finitamente generados sin torsión

Olga Ambas y Alejandro Petrovich

En este trabajo se inicia el estudio de caracterizar las extensiones galoisianas de grupos propuesto por José Carlos Cifuentes [1]. Con el objeto de estudiar el caso de grupos abelianos finitamente generados comenzamos aquí por resolver el caso cíclico y el caso de grupos abelianos finitamente generados sin torsión.

Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son grupos abelianos, pondremos $\mathbf{B} \mid \mathbf{A}$ si $\mathbf{B}$ es una extensión de $\mathbf{A}$, es decir, $\mathbf{A}$ es un subgrupo de $\mathbf{B}$. Como es habitual, notaremos con $\mathrm{Gal}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A})$ el grupo de los automorfismos de $\mathbf{B}$ que dejan fijo a $\mathbf{A}$.

Una extensión $\mathbf{B} \mid \mathbf{A}$ es *galoisiana* si y sólo si, si $x \in B$ y $x \notin A$, entonces existe $\gamma \in \mathrm{Gal}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A})$ tal que $\gamma(x) \neq x$.

En este trabajo probaremos los siguientes resultados:

Teorema 1. *Sea $\mathbf{B}$ un grupo cíclico, entonces se verifican:*

a) *Si $\mathbf{B}$ es infinito entonces la extensión $\mathbf{B} \mid \mathbf{A}$ es galoisiana si y sólo si $\mathbf{A} = \{0\}$.*
b) *Si $\mathbf{B}$ un grupo de orden n y n es impar, entonces toda extensión es galoisiana.*
c) *Si $\mathbf{B}$ un grupo de orden n y n es par, la extensión $\mathbf{B} \mid \mathbf{A}$ es galoisiana si y sólo si el orden de $\mathbf{A}$ es par.*

Teorema 2. *Si $\mathbf{B}$ es un grupo abeliano finitamente generado sin torsión y $\mathbf{A}$ es un subgrupo de $\mathbf{B}$, $\mathbf{B} \mid \mathbf{A}$ es una extensión galoisiana si y sólo si $\mathbf{A}$ es complementado.*

Referencias

[1] José Carlos Cifuentes, Extensões Galoisianas de Grupos e de Módulos no Contexto da Álgebra Universal (manuscrito).

Representaciones modulares del grupo $G(m,1,n)$

J. O. Araujo, L. C. Maiarú, M. Natale
Departamento de Matemática, UNICEN

A comienzos de la década del 80, las representaciones modulares del grupo simétrico fueron estudiadas por Farahat y Peel en [4], un año después, Aamily, Morris y Peel obtienen en [1] las representaciones irreducibles de un grupo de Weyl de tipo B_n. En ambos casos, las realizaciones de las representaciones correspondientes son tratadas desde el enfoque de la teoría combinatoria, siguiendo la modalidad establecida por James en [5].

En relación con la teoría de representaciones de grupos de Weyl, o más generalmente grupos finitos de reflexiones, Macdonald presenta en [6] una realización de representaciones irreducibles a partir de la estructura de sus sistemas de raíces del grupo en cuestión. En general, estas representaciones de Macdonald no agotan las representaciones irreducibles de un grupo de reflexiones. Sin embargo, para grupos de Weyl de tipo A_n y de tipo B_n toda representación irreducible es realizada como una representación de Macdonald. Esta situación es aprovechada en [2] y en [3] para obtener una realización de las todas representaciones modulares irreducibles de esta clase de grupos de Weyl.

Si bien, en el caso del grupo de reflexiones complejo $G(m,1,n)$, no toda representación puede ser obtenida como representación de Macdonald, hay contrucciones similares que juegan el mismo rol, esto da lugar para pensar en extender la realización de las representaciones modulares del grupos simétrico al grupo $G(m,1,n)$.

En esta comunicación, se presenta una realización de las representaciones modulares del grupo de reflexiones $G(m,1,n)$.

REFERENCIAS

[1] Aamily, E.; Morris, A. O.; Peel, M. H.: *The Representations of the Weyl Groups of Type B_n*. Journal of Algebra 68 (1981), 298–305.

[2] Aguado, J.L.; Araujo, J.O.: *Representations of de Symmetric Group $\mathfrak{S}_n$ on $K[x_1,\ldots,x_n]$*. Revista de la UMA, vol. 41, 2, 39–50, 1998.

[3] Araujo, J.O.; Bigeón, J.J.; Gamondi, R.M., *Modular Representations of Weyl groups of type B_n*. Communications in Algebra, Volume 38 Issue 7. 2010.

[4] Farahat, H. K.; Peel, M. H.: *On the Representation Theory of the Symmetric Groups*. Journal of Algebra 67 (1980) 280–304.

[5] James, G.: *The Representation Theory of the Symmetric Groups.* Lecture Notes in Mathematics 682. Springer-Verlag, 1978.

[6] Macdonald, I. G.: *Some Irreducible Representations Of Weyl Groups*. Bulletin of the London Mathematical Society 4 (1972) 148–150.

Modelos de involuciones y el modelo polinomial para grupos clásicos de Weyl

José O. Araujo y Tim Bratten

Facultad de Ciencias Exactas, UNCPBA, Tandil

Si G es un grupo finitio entonces *un modelo de Gelfand* es una representación de G, libre de multiplicidades, que se descompone en una suma directa de todas las representaciones irreducibles. En la literatura han surgido dos tipos de modelos Gelfand. El primer tipo es un modelo de involución, inspirado en la obra Klyachko y estudiado, por ejemplo, en [5], [6], [8] y [9]. El segundo tipo de modelo, el modelo polinomial, se introdujo en [1] ,y se estudió en [2], [3] y [7]. En un trabajo reciente [4], Araujo y Bratten definen un modelo de involución simple para los grupos clásicos de Weyl de tipo A_n, B_n y D_{2n+1} y construyen un isomorfismo explícito con el modelo polinomial. En esta comunicación se considera el isomorfismo entre el modelo de involución y el modelo polinomial dada por Araujo y Bratten.

REFERENCIAS

[1] Aguado, J. L.; Araujo, J. O.: *A Gelfand model for the symmetric group*, Comm. Algebra, **29** (2001) 1841–1851.

[2] Araujo, J.O.: *A Gelfand model for a Weyl group of type B_n*, Beiträge Algebra Geom. **44** (2003) 359–373.

[3] Araujo, J. O.; Bigeón, J. J.: *A Gelfand model for the Weyl group of type D_n and the branching rules $D_n \hookrightarrow B_n$*, J. Algebra **294** (2005) 97–116.

[4] Araujo, J.O., Bratten, T.: *Gelfand models for clasical Weyl groups.* arXiv:1112.3585.

[5] Baddeley, R.: *Models and involution Models for Wreath Products and certain Weyl groups*, J. London Math. Soc. **44** (1991) 55–74.
[6] Caselli, F.: *Involutory reflection groups and their models*, J. Algebra **24** (2010), 370–393.
[7] Garge, S. M., Oesterlé, J.: *On Gelfand Models for finite Coxeter groups*, J. Group Theory **13** (2010) 429–439.
[8] Inglis, N.F.J.; Richardson, R.W.; Saxl, J.: *An explicit model for the complex representations of S_n*, Arch. Math. **54** (1990) 258–259.
[9] Vinroot, C. R.: *Involution models of finite Coxeter groups*, J. Group Theory **11** (2008) 333–340.

Comunicaciones de Análisis

Difusiones en espacios métricos de medida vía operadores de diferenciación fraccionaria

Marcelo Actis y Hugo Aimar
IMAL (CONICET-UNL) y FIQ (UNL), Santa Fe

Recientes estudios en difusiones anómalas (ver [3]) utilizan operadores como el laplaciano fraccionario para modelar procesos de transporte sujetos a vuelos de Lévy que resultan en ecuaciones del tipo $u_t = -(-\Delta)^{s/2}u$. Estos procesos subdifusivos prevalecen en medios porosos como ser las estructuras fractales. Nuestro interés es generalizar estas ideas a espacios métricos de medida (X,d,μ).

Dado que la extensión natural del laplaciano fraccionario a espacios métricos viene dado por los operadores D^s de derivación fraccionaria considerados en [2], las ecuaciones presentadas en [3] en $\mathbb{R}^n$ resultarían en un problema (P) como $u_t = D^s u$, con $u(x,0)$ prescripto.

Como no disponemos de transformada de Fourier en X, no podemos resolver (P) como en el caso euclídeo. Así, como un primer paso hacia la resolución de (P) en (X,d,μ), y siguiendo las ideas de [1], consideraremos el nuevo operador de derivación $\mathscr{D}^\sigma$ construido a partir de la distancia diádica δ en lugar de d. Este operador tiene propiedades similares a las de D^s, que nos permitirán probar el siguiente teorema.

Teorema. *Sea* $0 < \sigma < 1$ *y* $u_0 \in B_2^\lambda(X,\mu)$*, con* $0 < \sigma < \lambda < 1$*, luego la función*

$$u(x,t) := \sum_{Q\in\mathfrak{D}} e^{-m_Q\mu(Q)^{-\sigma}t}\langle u_0, h_Q\rangle h_Q(x),$$

con $\{m_Q\} \in \ell^\infty$*, resuelve el problema*

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \mathscr{D}^\sigma u(x,t), & x\in X, t>0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in X. \end{cases}$$

Referencias

[1] Hugo A. Aimar, Bruno Bongioanni, and Ivana D. Gómez, *On dyadic nonlocal Schrödinger equations with Besov initial data*, IMAL Preprints (2012).

[2] A. Eduardo Gatto, Carlos Segovia, and Stephen Vági, *On fractional differentiation and integration on spaces of homogeneous type*, Rev. Mat. Iberoamericana **12** (1996), no. 1, 111–145.

[3] Sune Jespersen, Ralf Metzler, and Hans C. Fogedby, *Lévy flights in external force fields: Langevin and fractional Fokker-Planck equations and their solutions*, Phys. Rev. E **59** (1999), 2736–2745.

Teorema de valor medio y mejora de regularidad Besov para soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$

Gastón Beltritti, Hugo Aimar e Ivana Gómez

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (CONICET-UNL)

En este trabajo demostramos un teorema de mejora de regularidad en la escala de Besov para soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$ en un dominio D de $\mathbb{R}^n$. Probaremos que si $f \in B_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, $0 < \lambda < 1$ y además $(-\triangle)^s f = 0$ en D Lipschitz acotado de $\mathbb{R}^n$, entonces $f \in B_\tau^\alpha(D)$, con $\tau = (\alpha/n + 1/p)^{-1}$ y $0 < \alpha < \lambda n/(n-1)$. El resultado se basa en una nueva identidad del valor medio no local para soluciones de $(-\triangle)^s f = 0$ que se obtiene con la interpretación de L. Caffarelli y L. Silvestre [1] del operador $(-\triangle)^s$ como un operador "Dirichlet-Neumann" correspondiente a ciertas ecuaciones diferenciales en forma de divergencia. Una vez que esto se logra, se aplican las técnicas de [2] y la caracterización por wavelets de espacios de Besov, para arribar al resultado.

Referencias

[1] L. Caffarelli y L. Silvestre. *An extension problem related to the fractional Laplacian*. Comm. Partial Differential Equations, 32 (2007), 1245–1260.

[2] S. Dahlke y R. DeVore, *Besov regularity for elliptic boundary value problems*, Comm. Partial Differential Equations, 22 (1997), 1–16.

Integrales singulares inducidas por la sumabilidad de sistemas de Haar regularizados

Wilfredo Ariel Ramos

Los núcleos de sumabilidad de expansiones en bases (o sistemas) de tipo wavelets tienen, en el espacio euclídeo, algunas características de los operadores integrales singulares de Calderón-Zygmund. En particular en sus propiedades de acotación entre espacios de Lebesgue. En espacios métricos con medida la construcción de operadores integrales singulares genuinos ha sido siempre un problema de interés. Aprovechamos una extensión de la teoría de bases incondicionales en espacios métricos para generar una familia grande de tales operadores.

Mostramos una construcción de funciones regulares $\{\tilde{h}_Q^\varepsilon\}$ obtenidas por perturbaciones de un sistema de wavelets de Haar y probamos que este resulta un sistema de Bessel en $L^2(X, d, \mu)$ para ciertos ETH adecuados. Por otro lado usamos la teoría de integrales singulares y la descomposición de Calderon-Zygmund para demostrar la acotación del operador $T_\gamma^\varepsilon f := \sum \gamma_Q \langle f, \tilde{h}_Q^\varepsilon \rangle \tilde{h}_Q^\varepsilon$ sobre $L^p(X, w)$ para $1 < p < \infty$, donde w un peso en la clase A_p^{dy} y $\gamma = \{\gamma_Q\}$ una sucesión de unos y menos unos.

Referencias

[1] Favier J.; Zalic A. *On the Stability of Frames and Riesz Bases.* Applied and Computational Harmonic Analysis. no. 2, 160–173. 1995

[2] Cotlar M. *A Combinatorial Inequality and its Applications to L^2-spaces.* Rev. Mat. Cuyana 1 (1955), 41–55.

[3] Aimar H.; Bernardis A.; Iaffei B. *Comparison of Hardy-Littlewood and dyadic maximal functions on spaces of homogeneus type.* J. Math. Anal. Appl. 312 (1)(2005), 105–120.
[4] Duoandikoetxea J.: *Fourier Analysis.* Graduate Studies in Mathematics, vol. 29. Springer, 2000.
[5] Folland Gerald B. *Real Analysis. Modern techniques and their applications.* A Wiley-Interscience publications. 2nd ed. 1999.

Sobre una condición diádica de tipo Carleson y wavelets de Haar en espacios de tipo homogéneo

Raquel Crescimbeni y Luis Nowak

Los sistemas ortonormales de wavelets en la recta real o en $\mathbb{R}^n$ tienen una gran variedad de propiedades. Una de las más estudiadas es la caracterización de espacios funcionales via sus coeficientes de wavelets.

Si consideramos el espacio de funciones (clases) de oscilación media diádica acotada en la recta real

$$\mathrm{BMO}^d(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^1_{\mathrm{loc}} : \sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - f_I|\, dx \leq \infty \right\}$$

donde el supremo es tomado sobre todos los intervalos diádicos I de $\mathbb{R}$ y f_I es el promedio de f sobre I e $|I|$ representa la medida de Lebesgue del intervalo I, entonces tenemos el siguiente resultado [2].

Proposición 1. *La función ϕ pertenece a* BMO^d *si y sólo si existe una constante positiva y finita C tal que*

$$\sum_{J \subseteq I,\ J\ dyadic} |c_J|^2 \leq C|I| \tag{1}$$

para todo intervalo diádico I, donde $c_J = \langle \phi, h_J \rangle = \int \phi(x) h_J(x)\, dx$ y para cada intervalo diádico J la función de Haar h_J es definida como $\frac{1}{|J|^{1/2}}$ sobre el subintervalo diádico de la izquierda de J, como $\frac{-1}{|J|^{1/2}}$ sobre el subintervalo diádico de la derecha de J y cero en otro caso.

La condición (1) es conocida como condición discreta de Carleson.

Notemos que, aún cuando el resultado anterior da cierta caracterización del espacio BMO^d en términos del tamaño de los coeficientes de wavelets, no da una identificación en normas. Más precisamente, en la Proposición 1 el tamaño de los coeficientes de wavelets asociados con una función ϕ nada dice acerca de la norma de la función ϕ. En este trabajo consideramos este problema en un contexto más general que el caso euclídeo, el de espacio de tipo homogéneo. El trabajo está inspirado en [1] donde los autores abordan el mismo problema caracterizando, via wavelets con regularidad, al espacio BMO en el contexto euclídeo. Probamos aquí un análogo al resultado dado en [1] para espacios diádicos $\mathrm{BMO}^{\mathscr{D}}$ y wavelets de tipo Haar. Puesto que las wavelets de Haar no son funciones continuas, nuestra prueba es diferente a la dada en [1]. Para ello reemplazamos los argumentos de regularidad usados en [1] por argumentos geométricos y generalizamos la condición de Carleson al contexto de espacio de tipo homogéneo.

REFERENCIAS

[1] H. Aimar and A. Bernardis, *Wavelet characterization of functions with conditions on the mean oscillation*, Wavelet theory and harmonic analysis in applied sciences. Birkauser, 1997.
[2] A. Chang and R. Fefferman, *Some recent developments in Fourier analysis and H^p-theory on product domains*, Bull. of Amer. Math. Society. (12) 1 (1985), 1–43.

Muckenhoupt weights with singularities on closed lower dimensional sets in spaces of homogeneous type

Hugo Aimar, Marilina Carena y Marisa Toschi

We give sufficient conditions on a real number β and on a closed set F in a general space of homogeneous type (X,d,μ) in such a way that $\mu(B(x,d(x,F)))^{\beta}$ becomes an A_p-Muckenhoupt weight. Here $d(x,F) = \text{ínf}\{d(x,y) : y \in F\}$.

We start by defining a particular type of s-dimensional set, and we prove that this concept coincides with the one of s-Ahlfors with respect to the normalized quasi-distance defined by Macías and Segovia in [MS79].

We say that a closed subset F of X is ***s*-dimensional with respect to μ**, $s < 1$, if there exist a Borel measure ν supported on F and three constants $c_1, c_2, c_3 > 0$ such that for every $x \in F$ and every $0 < r < \text{diam}(F)$ the following two conditions are satisfied:

1. if $t > 0$ is such that $\mu(B(x,t)) < r$, then $\nu(B(x,t)) \leq c_1 r^s$;
2. there exists a d-ball B containing x with $\mu(B) < c_2 r$ and $\nu(B) \geq c_3 r^s$.

The main result is contained in the next statement.

Teorema 1. *Let (X,d,μ) be a space of homogeneous type and let $F \subseteq X$ be s-dimensional with respect to μ, with $0 \leq s < 1$. If no atoms of X belongs to F, then*

$$w(x) = \mu\left(B(x,d(x,F))\right)^{\gamma(s-1)}$$

belongs to $A_1(X,d,\mu)$ for every $0 \leq \gamma < 1$. Consequently $\mu\left(B(x,d(x,F_i))\right)^{\beta} \in A_p(X,d,\mu)$ for $-(1-s) < \beta < (1-s)(p-1)$ and $1 \leq p < \infty$.

In order to prove the above Theorem, we associate to a given space of homogeneous type a 1-Ahlfors space. A fundamental tool to construct this space, will be the “normalization” of a given space of homogeneous type (X,d,μ) introduced by Macías and Segovia in [MS79], where they define a quasi-metric δ such that (X,δ,μ) becomes a normal space, and the topologies induced on X by d and δ coincide. We use this quasi-metric to define a new metric measure space which results also non-atomic, and therefore an Ahlfors space, in which we apply the results obtained in [ACDT]. Also we prove that the Hardy-Littlewood maximal operators defined on (X,d,μ) and (X,δ,μ) are equivalent, so that A_p class are invariant under normalization.

REFERENCIAS

[ACDT] Hugo Aimar, Marilina Carena, Ricardo Durán, and Marisa Toschi. Powers of distances to lower dimensional sets as Muckenhoupt weights. Preprint.

[MS79] Roberto A. Macías and Carlos Segovia. Lipschitz functions on spaces of homogeneous type. *Adv. in Math.*, 33(3):257–270, 1979.

The distributional family $N_\alpha(x)$

Manuel Antonio Aguirre

Núcleo Consolidado Matemática Pura y Aplicada (NuCOMPA),
Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro

In this article we introduce the distributional family $N_\alpha(x)$ defined by

$$N_\alpha(x) = 2^{-\frac{\alpha}{2}} e^{\frac{\pi i}{2}(\alpha-2)} m^{\frac{n-\alpha}{2}} |x|^{\frac{\alpha-n}{2}} J_{\frac{n-\alpha}{2}}(m|x|),$$

where α is a complex number, m is nonnegative integer and $J_\lambda(z)$ is the Bessel function of the first kind defined by

$$J_\lambda(z) = (\frac{z}{2})^\lambda \sum_{v\geq 0} \frac{(-1)^v (\frac{z}{2})^{2v}}{v!\Gamma(\lambda+v+1)},$$

and proved several properties for different values of the parameter α. We give a sense to distributional convolution product $N_\alpha * N_\beta$. Using N_α we introduce the distributional A_α defined by $b_\alpha N_\alpha$, where $b_\alpha = e^{-(\alpha-2)\cdot\frac{\pi i}{2}}\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})$, and obtain properties such that $A_\alpha * A_\beta$, $A_\alpha * A_{-\alpha}$, $(m^2+\Delta)^k A_{2k}$ and we obtain that $E_{2k}(x) = A_{2k}(x)$ is elemental solution of the operator $(m^2+\Delta)$ iterated k-times, where Δ is the Laplacian operator.

El producto de convolución $\delta^{(k)}(x-1) * \delta^{(h)}(x-1)$

Marta García

NUCOMPA, Fac. de Ciencias Exactas,
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

En este artículo se le da un sentido al producto de convolución

$$\delta^{(k)}(x-1) * \delta^{(h)}(x-1) \tag{1}$$

y a extensiones de la forma $\delta^{(k)}(x-n) * \delta^{(h)}(x-m)$, con $n,m \in \mathbb{N}$, y $\delta^{(k)}(x-a) * \delta^{(h)}(x-b)$, con $a,b \in \mathbb{R}$.

Para obtener el producto de convolución indicado en (1) usamos un desarrollo en serie tipo Taylor de la derivada de orden k de la delta de Dirac soportada en $(x-1)$ (ver [1]).

Usando la transformada de Fourier de las funciones generalizadas $\frac{(x-1)_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$ y $\frac{(x-1)_+^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}$ en el sentido de Gelfand and Shilov (ver [2]) se obtienen los mismos resultados.

Para los casos de los productos de convolución $\delta^{(k)}(x-n) * \delta^{(h)}(x-m)$ con $n,m \in \mathbb{N}$ y $\delta^{(k)}(x-a) * \delta^{(h)}(x-b)$ con $a,b \in \mathbb{R}$, utilizamos la definición de la convolución para las funciones $\frac{(x-1)_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$ y $\frac{(x-1)_+^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}$.

En todos los casos los productos estudiados dan series de las derivadas de la delta de Dirac, a las cuales les corresponden desarrollos tipo Taylor de las derivadas de la δ.

REFERENCIAS

[1] García, Marta; Aguirre, Manuel. *Asymtotics Expansions and type Taylor Expansion in the Spaces*. Thai J. Math., 2004.

[2] Gelfand and Shilov. Generalized Functions: Properties and Operations. Academic Press, New York and London, 1964.

Some remarks on Beurling algebras

Carlos C. Peña

UNCPBA - FCExactas - Departamento de Matemáticas - NUCOMPA

Mediante G denotaremos un grupo separado localmente compacto provisto de la medida de Haar m_G. Hemos de considerar los espacios de Banach $L^p(G,w)$, con $1 \leq p \leq \infty$ y w una función medible y positiva. Para $f,g \in L^1(G,w)$ puede definirse $f * g \in L^1(G,w)$, la convolución de f y g, mediante

$$(f*g)(a) = \int_G f(b)\, g\left(b^{-1}a\right) dm_G(b) \qquad \text{a.e. } a \in G.$$

Provisto de este producto, si w fuere una función submultiplicativa $L^1(G,w)$ es un álgebra de Banach, conocida más precisamente en la literatura como álgebra de Beurling. Desde la introducción de las mismas en 1938 por A. Beurling hay una profusa investigación de las mismas. En particular, si G fuere semigrupo construcciones similares son posibles. La operación de convolución, fundamental en Análisis Armónico, obedece a motivaciones diversas, desde la observancia de como se multiplican polinomios al producto más intrínseco de medidas. Es de interés determinar condiciones bajo las cuales $L^p(G,w)$ es álgebra de Banach con el producto de convolución, ya sea sobre la topología de G, sobre w, etc. Este problema todavía no tiene una solución satisfactoria y ha mostrado dificultades que tienen interés propio. Una primera contribución, de 1961, es debida a W. Żelazko: Si G es grupo localmente compacto abeliano y $L^p(G)$ con el producto de convolución es anillo topológico para algún $p > 1$ entonces G es compacto. En 2010 F. Abtahi, R. Nasr-Isfahani y A. Rejali sentaron la llamada *Weighted L^p-Conjecture*: Si $L^p(G,w^p)$ es álgebra de Banach la función

$$\Omega_0(b) \triangleq \int_G \left(\frac{w(b)}{w(a)\,w(a^{-1}b)}\right)^{p/(p-1)} dm_G(a), \qquad \text{definida para } b \in G,$$

es esencialmente acotada. Probaremos que esta conjetura es correcta y daremos algunas respuestas a esta problemática bajo condiciones relativamente sencillas. Se mostrarán además algunos ejemplos en el contexto de semigrupos munidos de la topología discreta.

Sobre ciertos espacios de oscilación media

Mauricio Ramseyer, Oscar Salinas y Beatriz Viviani
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (CONICET) – FIQ (UNL), Santa Fe

Para $1 \leq q < \infty$ y $w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ una función medible consideremos el espacio $\mathrm{bmo}_{w,q}(\mathbb{R}^n)$ introducido en [2], que colecciona las funciones $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ para las cuales

$$\sup_{B(x,t)} \frac{1}{w(x,t)} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - f_B|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

donde f_B es el promedio de f sobre B. Como caso particular se tienen los espacios $\mathfrak{L}_{\alpha,p(\cdot)}$ presentados posteriormente en [3] como la imagen del operador integral fraccionaria actuando sobre espacios de Lebesgue con exponente variable. En general no es cierto que las funciones $w(x,t)$ generen espacios $\mathrm{bmo}_{w,q}(\mathbb{R}^n)$ iguales para todo $1 \leq q < \infty$. Un ejemplo de esto puede verse en el siguiente lema.

Lema. *Consideremos $\beta \in \mathbb{N}$ tal que $\beta > 1$ y $w(x,t) = \frac{1}{t} \left| \log^{1-\beta} \frac{1}{|x+t|} - \log^{1-\beta} \frac{1}{|x-t|} \right|$. Luego, la función*

$$g(x) = \frac{(\beta - 1)}{x \log^{\beta}\left(\frac{1}{|x|}\right)}$$

pertenece a $\mathrm{bmo}_{w,1}(\mathbb{R})$. Sin embargo, para todo $1 < q < \infty$, $g \notin \mathrm{bmo}_{w,q}(\mathbb{R})$.

Para responder a esta inquietud, exponemos aquí condiciones suficientes sobre $w(x,t)$ para obtener la igualdad de los espacios. Para ello, nos basamos en un corolario visto en [1].

Teorema. *Sea $w(x,t)$ una función medible en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ que es casi creciente en t. Supongamos además que $w(x,2t) \leq Cw(x,t)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para todo $t > 0$ y que $w(x,t) \leq Cw(y,t)$ siempre que $|x-y| < t$. Luego, los espacios $\mathrm{bmo}_{w,q}(\mathbb{R}^n)$ coinciden para todo $1 \leq q < \infty$.*

Este teorema tiene aplicación en la acotación de la transformada de Riesz en los espacios $\mathrm{bmo}_{w,1}(\mathbb{R}^n)$.

Referencias

[1] B. Franchi, C. Pérez and R. Wheeden, *Self-improving properties of John-Nirenberg and Poincaré inequalities on spaces of homogeneous type*, J. Funct. Anal. 153, (1998), 108–146.

[2] E. Nakai and K. Yabuta, *Pointwise multipliers for functions of bounded mean oscillation*, J. Math. Soc. Japan, 37(2), (1985), 207–218.

[3] M. Ramseyer, O. Salinas, B. Viviani, *Lipschitz type smoothness of the fractional integral on variable exponent spaces*, JMAA, 403, (2013), 95–106.

Descomposición atómica de espacios de Hardy con pesos asociados al operador de Schrödinger

B. Bongioanni, A. Cabral y E. Harboure
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (CONICET–UNL), Santa Fe

Sea $\mathscr{L} = -\Delta + V$ el operador de Schrödinger con un potencial V no negativo y que satisface una desigualdad anti-Hölder de orden q, $q > d/2$, donde la dimensión $d \geq 3$.

Asociada a V se define la función radio crítico

$$\rho(x) = \sup\left\{ r > 0 : \frac{1}{r^{d-2}} \int_{B(x,r)} V \ \leq 1 \right\}, \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

El sustituto de la clase de pesos de Muckenhoupt A_1, es en este caso la clase $A_1^{\rho,\infty}$, formada por los pesos w tales que

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} w \leq C \left(1 + \frac{r}{\rho(x)}\right)^{\theta} \inf_{B(x,r)} w,$$

para algún $\theta \geq 0$, las cuales fueron introducidas en [1].

En este contexto definimos el espacio de Hardy $H^1_\rho(w)$, con $w \in A_1^{\rho,\infty}$, por medio de una función maximal asociada con el semigrupo $\{T_t\}_{t>0}$ de operadores lineales generados por $-\mathscr{L}$.

El objetivo de este trabajo es dar una descomposición atómica del espacio $H^1_\rho(w)$ en átomos locales, esto es, átomos en el sentido usual pero con anulación sólo en el caso de tener soporte contenido en bolas subcríticas $B = B(x,r)$, $r \leq \rho(x)$.

La técnica desarrollada para llevar esto adelante consiste en descomponer el espacio mediante un cubrimiento por bolas críticas y localizar las funciones de $H^1_\rho(w)$ por medio de una partición de la unidad, reduciendo el problema a la descomposición atómica del espacio local

$$h^1(w) = \left\{ f \in L^1(w) : \sup_{0<t<1} |\psi_t * f| \in L^1(w) \right\},$$

para $\psi \in \mathscr{S}$ con $\int \psi = 1$.

REFERENCIAS

[1] B. Bongioanni, E. Harboure, and O. Salinas. *Classes of weights related to Schrödinger operators*. J. Math. Anal. Appl. 373(2):563–579, 2011.

Desigualdades con dos pesos para la integral fraccionaria asociada al operador de Schrödinger

R. Crescimbeni*, S. Hartzstein** y O. Salinas**

*Depto. de Matemática, Fac. de Economía y Administración, UNCo, Neuquén

**Depto. de Matemática, Fac. de Ingeniería Química, UNL e Inst. de Matemática Aplicada del Litoral, CONICET, Santa Fe

Consideremos el operador de Schrödinger en $\mathbb{R}^d$ con $d \geq 3$,

$$\mathscr{L} = -\Delta + V,$$

donde $V \geq 0$ es una función que satisface, para algún $q > \frac{d}{2}$, la desigualdad de Hölder inversa

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B V(y)^q\,dy\right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{C}{|B|}\int_B V(y)\,dy,$$

para cualquier bola $B \subset \mathbb{R}^d$. El conjunto de funciones con esta propiedad se denota usualmente RH_q. Es sabido que las potencias negativas del operador de Schrödinger pueden expresarse en términos del semigrupo de difusión del calor generado por $\mathscr{L}$ como

$$\mathscr{I}_\alpha f(x) = \mathscr{L}^{-\alpha/2} f(x) = \int_0^\infty e^{-t\mathscr{L}} f(x)\, t^{\alpha/2}\,\frac{dt}{t}, \quad \alpha > 0.$$

Para cada $t > 0$, $e^{-t\mathscr{L}}$ es un operador integral con núcleo $k_t(x,y)$ que tiene un mejor comportamiento lejos de la diagonal que el clásico núcleo del calor (ver [3], [4] y [6]). De esto se deduce que $\mathscr{I}_\alpha f$ es finito en casi todo punto aún cuando f pertenezca a L^p con $p \geq d/\alpha$. Más aún, fue probado por Garrigós et al. en [2] que $\mathscr{I}_\alpha$ mapea $L^{d/\alpha}$ en un espacio, llamado $\mathrm{BMO}_{\mathscr{L}}$, que es más pequeño que el bien conocido espacio BMO de John y Nirenberg.

Este último resultado fue extendido por Bongioanni, Harboure y Salinas en [1], donde consideraron el problema de acotación con un solo peso teniendo como punto de partida para $\mathscr{I}_\alpha$ el espacio de Lebesgue débil $L^{p,\infty}(w)$ con $p \geq d/\alpha$ y como espacio de llegada una clase adecuada de funciones Lipschitz integrables asociada a $\mathscr{L}$, denominada $\mathrm{BMO}_{\mathscr{L}}^{\beta}(w)$. Esta familia de espacios incluye a $\mathrm{BMO}_{\mathscr{L}}$, cuando $\beta = 0$ y $w = 1$. En ese trabajo se prueba que los pesos w de la clase definida por Harboure, Salinas y Viviani en [5] son adecuados para este propósito. Agreguemos que en [1] también fue abordado el problema de un peso para la acotación de la integral fraccionaria asociada al operador de Schrödinger entre espacios Lipschitz integrales.

En nuestro trabajo analizamos el problema de dos pesos para la acotación de $\mathscr{I}_\alpha$ entre espacios de Lebesgue débiles y espacios $\mathrm{BMO}_{\mathscr{L}}^{\beta}(w)$ y para entre dos diferentes de estos últimos espacios. De esta manera generalizamos los resultados en [1]. Pero nuestros resultados tienen otra mejora con respecto al trabajo anterior porque cuando nos restringimos al caso de un solo peso obtenemos una clase más amplia que la de [1], ya que logramos acotaciones más precisas en algunos pasos.

Referencias

[1] B. Bongioanni, E. Harboure, and O. Salinas. Weighted inequalities for negative powers of Schrödinger operators. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 348(1):12–27, 2008.

[2] J. Dziubánski, G. Garrigós, T. Martínez, J. Torrea, and J. Zienkiewicz. BMO spaces related to Schrödinger operators with potentials satisfying a reverse Hölder inequality. *Mathematische Zeitschrift*, 249(2):329–356, 2005.

[3] J. Dziubánski and J. Zienkiewicz. Spaces for Schrödinger operators H^p. *Fourier Analysis and Related Topics*, 56:45–53, 2002.
[4] J. Dziubánski and J. Zienkiewicz. Spaces associated with Schrödinger operator with potential from reverse Hölder classes H^p. *Colloq. Math.*, 98(1):5–38, 2003.
[5] E. Harboure, O. Salinas, and B. Viviani. Boundedness of the fractional integral on weighted Lebesgue and Lipschitz spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(1):235–255, 1997.
[6] K. Kurata. An estimate on the heat kernel of magnetic Schrödinger operators and uniformly elliptic operators with non-negative potentials. *J. London Math. Soc. Second Series*, 62(3):885–903, 2000.

Desigualdades con pesos para operadores maximales de tipo Cesàro en espacios de Lebesgue con exponente variable

Ana Bernardis, Estefanía Dalmasso y Gladis Pradolini
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (CONICET-UNL)
Facultad de Ingeniería Química (UNL)

Se obtienen desigualdades de tipo débil con pesos entre espacios de Lebesgue de exponente variable para el operador maximal

$$M_{\alpha,\gamma}f(x) = \sup_{R>0} \frac{1}{|Q(x,R)|^{1+\frac{\gamma-\alpha}{n}}} \int_{Q(x,R)} |f(y)| d(y, \partial Q(x,R))^{\gamma} dy,$$

$0 \leq \alpha < n$, $-1 < \gamma \leq 0$, siendo $Q(x,R)$ el cubo de centro x y radio R. Más precisamente, se caracterizan los pesos w para los cuales vale la siguiente desigualdad:

$$\sup_{\lambda>0} \lambda ||w\chi_{\{M_{\alpha,\gamma}f(x)>\lambda\}}||_{q(\cdot)} \leq C||fw||_{p(\cdot)},$$

siendo $p,q : \mathbb{R}^n \to [1,\infty)$ exponentes con ciertas propiedades de continuidad.

Cabe destacar que F. J. Martín-Reyes y A. de la Torre estudiaron versiones laterales de este operador (ver [2]). Además, se puede observar que cuando $\gamma = 0$, obtenemos el operador maximal fraccionario clásico M_α y, en el caso en que $\alpha = 0$, recuperamos la maximal de tipo Cesàro M_γ estudiada por A. L. Bernardis y F. J. Martín-Reyes (ver [1]).

Referencias

[1] Bernardis, A.L. y Martín-Reyes, F.J.: *The Cesàro maximal operator in dimension greater than one*, J. Math. Anal. Appl., 288 (2003), 69–77.
[2] Martín-Reyes, F.J. y De la Torre, A.: *Some weighted inequalities for general one-sided maximal operators*, Studia Math. 122, No. 1 (1997), 1–14.

Convergencia de los promedios de tipo Cesàro ergódicos múltiples

Cecilia Ferrari Freire
Depto. de Matemática, Fac. de Economía y Administración, UNCo, Neuquén

Dados $T_1, \ldots, T_k$ operadores lineales que conmutan entre sí, los promedios de tipo Cesàro ergódicos múltiples se definen como

$$\mathscr{R}_{\bar{n},\bar{\alpha}} f(x) = R_{n_1,\alpha_1} \circ \cdots \circ R_{n_k,\alpha_k} f(x) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{k} A_{n_j}^{\alpha_j}} \sum_{i_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{i_k=0}^{n_k} \prod_{j=1}^{k} A_{n_j - i_j}^{\alpha_j - 1} T_k^{i_k} \cdots T_1^{i_1} f(x),$$

donde $0 < \alpha_j \leq 1$, para $1 \leq j \leq k$ y $A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}{n!}$, $n \neq 0$ y $A_0^\alpha = 1$.

En este trabajo presentamos resultados sobre la convergencia de los promedios $\mathscr{R}_{\bar{n},\bar{\alpha}} f$ cuando $n_1, n_2, \ldots, n_k$ tienden a infinito independientemente.

Bajo ciertas condiciones en los operadores se obtienen resultados positivos para funciones de L^p con $p > \frac{1}{1+\alpha_*}$, donde $\alpha_* = \min_{1 \leq j \leq k} \{\alpha_j\}$ y en el extremo $p = \frac{1}{1+\alpha_*}$ para funciones en el espacio de Orlicz-Lorentz $\Lambda(1/\alpha_*, \varphi_{k-1})$, donde $\varphi_k(t) = t(1 + \log^+ t)^k$.

El estudio de la convergencia de estos promedios se basa en la obtención de acotaciones del operador maximal asociado

$$\mathscr{M}_{\bar{\alpha}} f(x) = \sup_{\bar{n}>0} |R_{\bar{n},\bar{\alpha}} f(x)|,$$

donde $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_k) > 0$ significa que $n_j > 0$ para todo $1 \leq j \leq k$ y la convergencia de los promedios $\mathscr{R}_{\bar{n},\bar{\alpha}} f(x)$ para funciones en subconjuntos densos apropiados.

Resultados sobre la convergencia de los promedios ergódicos múltiples usuales ($\alpha_j = 1$ para todo $j = 1, \ldots, k$) pueden encontrarse por ejemplo en el libro [DS] cuando $p > 1$ y en [F] el caso extremo $p = 1$. Resultados sobre la convergencia para los promedios ergódicos de Cesàro asociados a un único operador ($k = 1$) han sido analizados en [MS] y [BM].

REFERENCIAS

[1] Bernardis, A. L.; Martín-Reyes, F. J. *The limit case of the Cesàro-α convergence of the ergodic averages and the ergodic Hilbert transform*, Proc. Royal Soc. Edinb., **130** (2000), 225–237.
[2] Dunford, N.; Schwartz, J.T. *Linear Operators*, Wiley-Interscience Publ. Inc. (New York), 1958.
[3] Fava, N. *Weak type inequalities for product operators* Studia math. XLII (1972), 271-288.
[4] Martín-Reyes, F. J. and Sarrión Gavilán, M. D. *Almost everywhere convergence and boundedness of Cesàro-α ergodic averages*, Illinois J. Math., **43** (1999), 592–611.

Desigualdades para operadores laterales en espacios de Orlicz

Sergio Favier* y Sonia Acinas**
*IMASL, CONICET y UNSL
**UNLPam y UNSL

Denotamos con M^+ y M^- a los operadores maximales laterales dados por

$$M^+f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(y)|\,dy \quad \text{y} \quad M^-f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x} |f(y)|\,dy$$

para $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Sea Φ el conjunto de todas las funciones $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no negativas, pares, no decrecientes sobre $[0,\infty)$ y tales que $\varphi(x) > 0\ \forall x > 0$, $\varphi(0+) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$.

A partir del concepto de cuasi-convexidad introducido en [KK], obtenemos condiciones necesarias y suficientes sobre la función $\varphi \in \Phi$ para que se verifiquen

$$|\{x \in \mathbb{R} : M^{\pm}f(x) > \lambda\}| \le c \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(cf)}{\varphi(\lambda)}\,dx \tag{1}$$

o

$$|\{x \in \mathbb{R} : M^{\pm}f(x) > \lambda\}| \le c \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{cf}{\lambda}\right)dx \tag{2}$$

para toda $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ y para todo $\lambda > 0$.

Luego, usando (1) o (2) y técnicas de interpolación, conseguimos desigualdades de tipo fuerte como $\int_{\mathbb{R}} \Psi(M^{\pm}f)\,dx \le K \int_{\mathbb{R}} \Psi(f)\,dx$ para una clase de funciones de Young Ψ dadas por $\Psi(x) = \int_0^x \psi(t)\,dt$ y tales que ψ está relacionada con φ mediante $\prec$ o $\prec_N$ definidas en [MZ] y [FA] respectivamente.

Asimismo, en forma análoga a lo hecho en [FZ], definimos operadores maximales laterales $\mathscr{M}^{\pm}$ asociados a operadores de mejor aproximación lateral por constantes y encontramos condiciones necesarias y suficientes sobre la función θ para que se satisfaga $\int_{\mathbb{R}} \theta(\mathscr{M}^{\pm}|f|)\,dx \le K \int_{\mathbb{R}} \theta(C|f|)\,dx$.

REFERENCIAS

[FA] S. Favier, S. Acinas, *Maximal Inequalities in Orlicz Spaces*, Int. Journal of Math. Analysis, **6, 44** (2012), 2179-2198.

[FZ] S. Favier, F. Zó, *Maximal Inequalities for a Best Approximation Operator in Orlicz Spaces*, Comment. Math., **51, 1** (2011), 3-21.

[KK] V. Kokilashvili, M. Krbec, *Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces*, World Scientific, Singapore, 1991.

[MZ] F.D. Mazzone, F. Zó, *On Maximal Inequalities Arising in Best Approximation*, J. Inequal. Pure and Appl. Math., **10(2)** (2009), Art. 58, 10 pp.

Comunicaciones de Geometría

Control óptimo de sistemas mecánicos no holónomos

Leonardo Colombo
Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT), Madrid, España

En esta charla estudiaremos la relación entre la mecánica de orden superior y la mecánica no holónoma para resolver un problema de control óptimo para sistemas mecánicos con vínculos no holónomos. Esta relación será descrita a través de subvariedades lagrangianas de una variedad simpléctica.

Interesantes aplicaciones se derivan de este formalismo, como la construcción de integradores variacionales para esta familia de problemas de control óptimo y la extensión al formalismo de algebroides de Lie antisimétricos, entre otras.

REFERENCIAS

[1] M. Barbero-Liñán, M. de León, J.C. Marrero, D. Martín de Diego and M. Muñoz-Lecanda: *Kinematic reduction and the Hamilton-Jacobi equation* J. Geom. Mech. 4 (3) (2012) 207–237,
[2] A.M. Bloch. *Nonholonomic Mechanics and Control.* Interdisciplinary Applied Mathematics Series, 24, Springer-Verlag, New York (2003).
[3] F. Bullo, A. Lewis. *Geometric Control of Mechanical Systems: Modeling, Analysis, and Design for Simple Mechanical Control Systems.* Texts in Applied Mathematics, Springer Verlag, New York (2005).
[4] M. de León, J.C. Marrero, E. Martínez: *Lagrangian submanifolds and dynamics on Lie algebroids,* J. Phys. A: Math. Gen. 38 (2005), 241–308.
[5] M. de León, J.C. Marrero and D. Martín de Diego: *Linear almost Poisson structures and Hamilton-Jacobi theory. Applications to nonholonomic mechanics,* J. Geom. Mech. 2 (2) (2010) 159–198.

Un esquema de reducción de Lagrange-Poincaré para principios variacionales generales

Santiago Capriotti
Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur – INMABB

Los problemas variacionales usuales en mecánica clásica y teorías de campo determinan un sistema dinámico mediante la elección de una función sobre una variedad, el *lagrangiano*, via las así llamadas *ecuaciones de Euler-Lagrange* [AM78, Ble81, MR94]. Un aspecto importante de estos sistemas está relacionado con *simetrías*: Si un grupo de Lie deja invariante el lagrangiano, entonces es subgrupo del grupo de simetrías de la ecuación diferencial subyacente, y un teorema de Noether [Noe18] permite asociarle cantidades conservadas. La *reducción de Euler-Poincaré* y *de Lagrange-Poincaré* [CMR01, LR03] provee un procedimiento para la eliminación de los grados de libertad superfluos, asociados a coordenadas sobre las órbitas del grupo de simetrías.

Los problemas variacionales que surgen en mecánica y teoría de campos forman un subconjunto de una clase más general que podemos llamar *problemas variacionales generales*

[Gri98, Hsu92, Got91]: En estos casos particulares sus variaciones deben respetar una *estructura de contacto* que es característica de estos problemas, mientras que en un problema variacional general la estructura de contacto se reemplaza por un *sistema diferencial exterior* [BCG+91]. Utilizando una propuesta de Anderson y Fels [AF05, Fel08] para la reducción de un sistema diferencial exterior arbitrario por simetrías, se propone una posible extensión del concepto de reducción para problemas variacionales generales; en la medida que el tiempo lo permita, se discutirán algunas aplicaciones del esquema propuesto.

REFERENCIAS

[AF05] I. M. Anderson and M. E. Fels. Exterior differential systems with symmetry. *Acta Appl. Math.*, 87(1-3):3–31, 2005.

[AM78] R. Abraham and J. E. Marsden. *Foundations of mechanics*. Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc. Advanced Book Program, Reading, Mass., 1978.

[BCG+91] R.L. Bryant, S.S. Chern, R.B. Gardner, H.L. Goldschmidt, and P.A. Griffiths. *Exterior differential systems*. Springer-Verlag, 1991.

[Ble81] D. Bleecker. *Gauge Theory and Variational Principles*. Addison-Wesley, 1981.

[CMR01] H. Cendra, J.E. Marsden, and T.S. Ratiu. *Lagrangian Reduction by Stages*. No. 722 in Memoirs of the American Mathematical Society Series. American Math. Soc., 2001.

[Fel08] Mark E. Fels. Exterior differential systems with symmetry. Eastwood, Michael (ed.) et al., Symmetries and overdetermined systems of partial differential equations. Proceedings of the IMA summer program, Minneapolis, MN, USA, July 17–August 4, 2006. New York, NY: Springer. The IMA Volumes in Mathematics and its Applications 144, 351-361, 2008.

[Got91] M.J. Gotay. An exterior differential system approach to the Cartan form. In P. Donato, C. Duval, J. Elhadad, and G.M. Tuynman, editors, *Symplectic geometry and mathematical physics. Actes du colloque de géométrie symplectique et physique mathématique en l'honneur de Jean-Marie Souriau, Aix-en-Provence, France, June 11-15, 1990.*, pages 160 –188. Progress in Mathematics. 99. Boston, MA, Birkhäuser, 1991.

[Gri98] P. A. Griffiths. *Exterior Differential Systems and Calculus of Variations*. Birkhauser, 1998.

[Hsu92] L. Hsu. Calculus of variations via the Griffiths formalism. *J. Diff. Geom.*, 36:551–589, 1992.

[LR03] M. Castrillón López and T. S. Ratiu. Reduction in Principal Bundles: Covariant Lagrange-Poincaré Equations. *Communications in Mathematical Physics*, 236:223–250, 2003.

[MR94] J.E. Marsden and T.S. Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry*, volume 17 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag New York, Inc., 1994.

[Noe18] E. Noether. Invariante Variationsprobleme. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1918:235–257, 1918.

Comunicaciones de Lógica

Observaciones sobre semirretículos distributivos

Sergio Celani e Ismael Calomino

Un semirretículo $\langle A, \wedge \rangle$ es *distributivo* si para todo $a, b, c \in A$ con $a \wedge b \leq c$, existen $a_1, b_1 \in A$ tales que $a \leq a_1$, $b \leq b_1$ y $c = a_1 \wedge b_1$. En [5], George Grätzer desarrolla una representación topológica para dichas estructuras y extiende la conocida representación de Stone. Por otro lado, en [3], se desarrolla una dualidad entre semirretículos distributivos con último elemento y ciertos espacios topológicos, completando de esta forma los resultados obtenidos por Grätzer. Los homomorfismos entre semirretículos distributivos son caracterizados a través de ciertas relaciones binarias entre sus espacios duales. Recientemente en [1] G. Bezhanishvili y R. Jansana presentaron una dualidad tipo Priestley para la categoría de los semirretículos distributivos acotados con homomorfismos que respetan el último elemento.

En esta comunicación exponemos las siguientes líneas de trabajo: en primer lugar, presentamos una nueva equivalencia de la distributividad de un semirretículo en términos de filtros maximales relativos. En segundo lugar, simplificamos la representación topológica dada en [3] a través de espacios topológicos sober, donde el orden esta dado por la topología. Finalmente, teniendo en cuenta dicha simplificación y siguiendo los resultados desarrollados en [2], mostramos que las imágenes homomórficas de un semirretículo distributivo pueden ser caracterizadas a través de una familia de conjuntos cerrados de su espacio dual dotada de la topología Vietoris. Daremos algunas aplicaciones de dichos resultados.

REFERENCIAS

[1] G. Bezhanishvili and R. Jansana, *Priestley style duality for distributive meet-semilattices*. Studia Logica, 98 (2011), pp. 83–122.
[2] G. Bezhanishvili and R. Jansana, *Generalized Priestley quasi-orders*. Order, 28 (2011), pp. 201–220.
[3] S. A. Celani, *Topological representation of distributive semilattices*. Scientiae Math. Japonicae, 8 (2003), pp. 41–51.
[4] S. A. Celani and I. M. Calomino, *Some remarks on distributive semilattices*. Aceptado en Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae.
[5] G. Grätzer, *General Lattice Theory*. Birkhäuser Verlag (1998).

Congruencias en álgebras de Hilbert con operador modal necesidad

Sergio A. Celani y Daniela Montangie

Un álgebra de Hilbert con operador modal necesidad $\Box$, o bien $H\Box$-álgebra, es un par $A = \langle A, \Box \rangle$ donde A es un álgebra de Hilbert y $\Box$ es un semi-homomorfismo definido sobre A.

Esta variedad de álgebras fue estudiada en [1], donde entre otros resultados, se desarrolló una dualidad topológica utilizando ciertos espacios topológicos sober dotados de una relación binaria satisfaciendo ciertas condiciones adicionales. El propósito de esta charla es dar una caracterización de las congruencias de una $H\Box$-álgebra en términos de ciertos conjuntos cerrados del espacio dual y de los sistemas deductivos cerrados bajo $\Box$. Esta caracterizaciónn es utilizada para estudiar las álgebras simples y subdirectamente irreducibles en algunas subvariedades de $H\Box$-álgebras.

REFERENCIAS

[1] S. A. Celani and D. Montangie, Hilbert Algebras with a necessity modal operator, preprint.
[2] S. A. Celani, L. M. Cabrer and D. Montangie, *Topological duality for Hilbert algebras*, Central European Journal of Mathematics, **7** (2009), No. 3, 463–478.

A note on n-valued Hilbert algebras with supremum

A.V. Figallo*, E. Pick*, S. Saad* y M. Figallo**

*Instituto de Ciencias Básicas, Universidad Nacional de San Juan

**Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur

Hilbert algebras with supremum, i.e., Hilbert algebras where the associated order is a join-semilattice, were first considered by A.V. Figallo, G. Ramón and S. Saad in [1], and independently by S. Celani and D. Montangie in [2].

On the other hand, L. Monteiro introduced the notion of n-valued Hilbert algebras (see [3]).

In this note, we investigate the class of n-valued Hilbert algebras with supremum, denoted $H_n^{\vee}$, i.e., n-valued Hilbert algebras where the associated order is a join-semilattice. In particular, we prove that $H_n^{\vee}$ constitutes a variety. Besides, the free $H_n^{\vee}$-algebra $\mathbf{Free}_{n+1}(m)$ with m generators is described.

The most important result of this work is the determination of a formula for calculating the cardinal of the algebra $\mathbf{Free}_{n+1}(m)$ for any natural number m.

REFERENCIAS

[1] A.V. Figallo, G. Ramón and S. Saad. Algebras de Hilbert $n+1$-valuadas con supremo. Preprint UNSJ (1998).
[2] S. Celani and D. Montangie. Hilbert algebras with supremum. *Algebra Universalis* 67 (2012), 237–255.
[3] L. Monteiro, Algebres de Hilbert n-valentes, *Portugaliae Math.* 36 (1977), 159–174.

Weak implication on monadic Heyting algebras

Aldo Figallo* y Alicia Ziliani**

*Instituto de Ciencias Básicas, Universidad Nacional de San Juan

**Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur

In [8], A. Monteiro and O. Varsavsky defined monadic Heyting algebras (or MH-algebras for short) as a generalization of monadic Boolean algebras ([7]). From that moment on, MH-algebras have been generalized in different ways, for reference see for example [1, 4, 5, 6].

On the other hand, monadic Heyting algebras were deeply studied by G. Bezhanishvili in [1, 2]. In particular, this author developed the duality theory for these algebras which allowed him to characterize the MH-congruences.

In this article, among other results, we define an implication operation, which we call *weak implication*, by means of the formula

$$x \Rightarrow y = \forall x \to y, \tag{1}$$

were $\to$ is the Heyting implication and $\forall$ is the universal quantifier. Bearing in mind the technique indicated in [9], this notion enables us to describe the MH-congruences in a much easier way than the one stated by Bezhanishvili. Furthermore, we give a characterization of semisimple MH-algebras different from the one announced in [8] without proof. It is worth mentioning that the operation given in (1) generalizes the *weak implication* defined by Figallo in [5].

REFERENCIAS

[1] G. Bezhanishvili, *Varieties of monadic Heyting algebras. Part I*, Studia Logica 61 (1998), 367–402.
[2] G. Bezhanishvili, *Varieties of monadic Heyting algebras. Part II: Duality theory*, Studia Logica 62 (1998), 1–28.
[3] V. Boicescu, A. Filipoiu, G. Georgescu and S. Rudeanu, *Łukasiewicz–Moisil Algebras*, Annals of Discrete Mathematics 49, North-Holland, 1991.
[4] R. Cignoli, *Quantifiers on distributive lattices*, Discrete Math. 96 (1991), 183–197.
[5] A. V. Figallo. Algebras de Tarski monádicas. Facultad de Filosofía Humanidades y Artes, UNSJ, 1983, 1–21.
[6] A.V. Figallo, I. Pascual and A. Ziliani, *Monadic distributive lattices*, Logic Jnl IGPL, 15 (2007), 535–551.
[7] P. R. Halmos, *Algebraic Logic I. Monadic Boolean Algebras*, Compositio Math. 12 (1955), 217–249.
[8] A. Monteiro and O. Varsavsky, *Algebras de Heyting monádicas*, Actas de las X Jornadas de la Unión Matemática Argentina, Bahía Blanca, (1957), 52–62.
[9] A. Monteiro, *Sur les algèbres de Heyting symétriques*, Portugaliae Math., 39 (1980), 1–237.

Unificación en subvariedades de retículos distributivos pseudocomplementados

Leonardo Cabrer
Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Statistica, Informatica, Applicazioni "G. Parenti"
Marie Curie Intra-European Fellowship – FP7

La teoría sintáctica de unificación se dedica a estudiar la existencia de substituciones que identifican conjuntos finitos de pares de términos. Cuando los conectivos del lenguaje considerado estan sujetos a condiciones que pueden expresarse utilizando ecuaciones (tales como conmutatividad, asociatividad, idempotencia, ...) la unificación sintáctica se transforma en unificacion ecuacional. Más precisamente, dada una teoría ecuacional E en un lenguaje $\mathscr{L}$, un *unificador* para un conjunto finito de pares de $\mathscr{L}$-términos $U = \{(t_1,s_1),\dots,(t_n,s_n)\}$ es una substitución σ tal que $\sigma(t_i) \cong_E \sigma(s_i)$ para cada $i \in \{1,\dots,n\}$.

Un vez que se identifica al menos un unificador para un conjunto U, el siguiente paso es el de enumerar todos sus posibles unificadores. Si σ es un E-unificado para U, entonces $\gamma \circ \sigma$ también lo es, para cada γ una substitución tal que la composición está bien definida $\gamma \circ \sigma$. En este caso decimos que σ es *más general* que $\gamma \circ \sigma$. Una manera de representar todos los unificadores de U es determinar una familia de unificadores que sea más general que cada uno de los unificadores de U. Este conjunto de unificadores es llamado un conjunto completo de unificadores para U. Dependiendo de la existencia y la cardinalidad de un conjunto no redundante de unificadores se define el tipo de unificación de U (para encontrar definiciones más detalladas, referencias y aplicaciones de la teoría de unificación recomendamos los surveys [1, 2, 4]).

En este trabajo presentaremos una clasificación de las subvariedades de retículos distributivos por su tipo de unificación. Estos resultados están basados en la caracterización la dualidad de Priestley para retículos distributivos pseudocomplementados [5], en la caracterización de los retículos distributivos pseudocomplementados proyectivos [6] y en la teoría de unificación ecuacional desarrollada en [3].

REFERENCIAS

[1] F. Baader and J.H. Siekmann, Unification theory, in *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming* Vol. **2** (D.M. Gabbay, C.J. Hogger and J.A. Robinson. Eds.), Oxford University Press, Oxford, 41–125 (1994).

[2] F. Baader and W. Snyder, Unification theory, in *Handbook of Automated Deduction*, (A. Robinson and A. Voronkov. Eds.) Springer Verlag, Berlin, 445–533 (2001).

[3] S. Ghilardi, Unification through projectivity, *Journal of Logic and Computation* **7**(6) (1997), 733–752.

[4] J.P. Jouannaud and C. Kirchner, Solving Equations in Abstract Algebras: A Rule-Based Survey of Unification, in *Computational Logic – Essays in Honor of Alan Robinson'91* (J.L. Lassez and G. Plotkin. Eds.), (1991), 257–321.

[5] H.A. Priestley, The construction of spaces dual to pseudocomplemented distributive lattices, *Quarterly Journal of Mathematics. Oxford Series.* **26**(2) (1975), 215–228.

[6] A. Urquhart, Projective distributive p-algebras, *Bulletin of the Australian Mathematical Society* **24** (1981), 269–275.

Operadores temporales sobre álgebras de Łukasiewicz–Moisil $n \times m$-valuadas

Aldo V. Figallo* y Gustavo Pelaitay**

*Instituto de Ciencias Básicas, Universidad Nacional de San Juan

**Instituto de Ciencias Básicas, Universidad Nacional de San Juan.
Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur

En 1975, W. Suchoń ([9]) introdujo las álgebras de Łukasiewicz matriciales, generalizando así la noción de álgebra de Łukasiewicz n-valuada sin negación ([6]). Por otra parte, A.V. Figallo y C. Sanza en [3] introdujeron las álgebras de Łukasiewicz $n \times m$-valuadas con negación. Pero, siguiendo la terminología establecida en [1], posteriormente las llamaron álgebras de Łukasiewicz–Moisil $n \times m$-valuadas (o, para abreviar, $\mathrm{LM}_{n\times m}$-álgebras) ([8]). Estas álgebras son un caso particular de las álgebras de Łukasiewicz matriciales y una generalización de las álgebras de Łukasiewicz–Moisil n-valuadas ([1]).

La variedad de las $\mathrm{LM}_{n\times m}$-álgebras fueron investigadas en [7], [8] y [5]. En particular, en [7] se proporcionó un ejemplo importante que legitima el estudio de esta nueva clase de álgebras.

En el presente trabajo introducimos y estudiamos $\mathrm{LM}_{n\times m}$-álgebras a las que les adicionamos operadores temporales. Más precisamente, una $\mathrm{LM}_{n\times m}$-álgebra con operadores temporales (o $\mathrm{LM}_{n\times m}$-álgebra temporal) es un álgebra

$$\langle L, \vee, \wedge, \sim, \{\sigma_{ij}\}_{(i,j)\in n\times m}, G, H, 0, 1\rangle$$

donde $\langle L, \vee, \wedge, \sim, \{\sigma_{ij}\}_{(i,j)\in n\times m}, 0, 1\rangle$ es un $LM_{n\times m}$-álgebra y G, H son operadores unarios sobre L que satisfacen las ecuaciones:

(T1) $G(1) = 1, H(1) = 1,$
(T2) $G(x\wedge y) = G(x\wedge y), H(x\wedge y) = H(x)\wedge H(y),$
(T3) $G(\sigma_{ij}(x)) = \sigma_{i,j}(G(x)), H(\sigma_{ij}(x)) = \sigma_{i,j}(H(x))$, para todo $(i, j) \in (n\times m)$,
(T4) $x \leq GF(x), x \leq HP(x)$, donde $F(x) =\sim G(\sim x)$ y $P(x) =\sim H(\sim x)$.

Estas álgebras constituyen una generalización de las álgebras de Łukasiewicz–Moisil temporales ([2]) y una ampliación de las álgebras de De Morgan temporales ([4]).

REFERENCIAS

[1] V. Boicescu, A. Filipoiu, G. Georgescu and S. Rudeanu, *Łukasiewicz–Moisil Algebras*, Annals of Discrete Mathematics 49, North-Holland, 1991.
[2] D. Diaconescu and G. Georgescu, *Tense operators on MV-algebras and Łukasiewicz–Moisil algebras*, Fund. Inform. 81 (2007), 4, 379–408.
[3] A.V. Figallo, C. Sanza, *Algebras de Łukasiewicz matriciales $n\times m$-valuadas con negación*, Noticiero de la Unión Matemática Argentina 2000, 93.
[4] A.V. Figallo and G. Pelaitay, *Tense Operators on De Morgan Algebras*, to appear in L. J. of the IGPL.
[5] A.V. Figallo and C. Sanza, *Monadic $n\times m$-Lukasiewicz–Mosil Algebras*, Mathematica Bhoemica, 137, 4(2012), 425–447.
[6] Gr. C. Moisil, *Essais sur les logiques non Chrysippiennes*, Bucarest, 1972.
[7] C. Sanza, *$n\times m$-valued Łukasiewicz algebras with negation*, Rep. Math. Logic 40(2006), 83–106.
[8] C. Sanza, *On $n\times m$-valued Łukasiewicz–Moisil algebras*, Cent. Eur. J. Math., 6(3)(2008), 372–383.
[9] W. Suchoń, *Matrix Łukasiewicz Algebras*, Rep. on Math. Logic, Vol. 4, (1975), 91–104.

IMT$_n$-álgebras

Juan Manuel Cornejo y Laura Rueda

Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur

La lógica de la t-norma monoidal continua a izquierda, abreviada por $\mathbb{IMTL}$, fue introducida en [1] con el objetivo de brindar una lógica proposicional correspondiente a las t-normas continuas a izquierda. $\mathbb{IMTL}$ se obtiene agregando la condición involutiva $(\neg\neg\phi \to \phi)$ a la lógica de la t-norma continua $\mathbb{MTL}$. Además la lógica $\mathbb{MTL}$ puede ser vista como una lógica más débil que la lógica básica difusa de Hajek quitando la condición de divisibilidad.

Considerando el axioma

$$(EM_n) \quad \neg\phi^n \vee \phi,$$

se tiene que (EM_n) para $n > 1$ son formas débiles del principio de bivalencia. Si agregamos al cálculo proposicional infinitamente valuado de Lukasiewicz, L_∞, el axioma (EM_1), obtenemos el cálculo proposicional notado por CPC. Si agregamos el axioma (EM_2) a L_∞ obtenemos el cálculo proposicional de Lukasiewicz trivalente. En el caso general, utilizando el axioma (EM_n), se tiene la intersección de todas los cálculos proposicionales m-valuados de Lukasiewicz. Para simplificar, escribiremos $\mathbb{IMT}_n\mathbb{L}$ la lógica definida por la axiomática de $\mathbb{IMTL}$ sumado el axioma (EM_n).

En [2] los autores focalizan su trabajo en $\mathbb{IMT}_3\mathbb{L}$. Ellos estudian todas las extensiones axiomáticas de $\mathbb{IMT}_3\mathbb{L}$ y, en consecuencia, describen el reticulado de subvariedades de la clase algebraica asociada.

En este trabajo estudiamos diferentes subvariedades de la semántica algebraica, $\mathbf{IMT}_n$, asociada a $\mathbb{IMT}_n\mathbb{L}$ para $n > 1$. Encontramos propiedades que generalizan las obtenidas para $\mathbb{IMT}_3\mathbb{L}$ en [2] por Gispert y Torrens. También establecemos diferencias bien marcadas para el caso general, es decir para un valor de n arbitrario. Por ejemplo verificamos que, a diferencia del caso $n = 3$, la variedad $\mathbf{IMT}_n$ no es localmente finita si $n \geq 4$. Considerando que la variedad $\mathbf{IMT}_n$ está generada por sus álgebras totalmente ordenadas, estudiamos cadenas de esta clase de álgebras; describimos, además, todas las cadenas finitas que se pueden definir en $\mathbf{IMT}_4$ y damos un método para generarlas a todas.

REFERENCIAS

[1] Esteva, Francesc; Godo, Lluis, Monoidal t-norm based logic: towards a logic for left-continuous t-norms, Fuzzy logic (Palma, 1999/Liptovský Ján, 2000). Fuzzy Sets and Systems 124 (2001), no. 3, 271–288.

[2] Gispert, Joan; Torrens, Antoni, Axiomatic extensions of IMT3 logic, Studia Logica 81 (2005), no. 3, 311–324.

La lógica Ł$^\bullet$

Marta Sagastume y Hernán Javier San Martín

Facultad de Ciencias Exactas, UNLP – CONICET

En [1] se establece una equivalencia entre la categoría IRL_0 de retículos residuados integrales con primer elemento y cierta categoría de retículos residuados involutivos denominada DRL', cuyos objetos son c-retículos residuados diferenciales satisfaciendo la condición adicional ($\mathrm{CK}^\bullet$) (ver [1, 2]). Luego fue probado en [2] que un c-retículo residuado diferencial satisface la condición ($\mathrm{CK}^\bullet$) si y sólo si es posible definir una operación unaria κ que satisface condiciones similares a las de un cuantificador. En [2] se considera a DRL' como la categoría cuyos objetos son álgebras que tienen a κ en la signatura de las mismas. La categoría MV de MV-álgebras puede ser vista como una subcategoría plena de IRL_0, y $\mathrm{MV}^\bullet$ es la imagen de MV a través de la equivalencia mencionada (ver [2]).

Este trabajo es un primer paso en nuestro intento de establecer un vínculo entre dos lógicas, respectivamente asociadas a las categorías de modelos algebraicos MV y $\mathrm{MV}^\bullet$. Estudiaremos la lógica Ł$^\bullet$, cuya semántica algebraica equivalente es la variedad $\mathrm{MV}^\bullet$, y su relación con la lógica infinito valuada de Łukasiewicz asociada a MV. Finalmente definiremos y estudiaremos U-operadores en $\mathrm{MV}^\bullet$, los cuales fueron estudiados para el caso de MV-álgebras (ver [3, 4, 5, 6]). Estos operadores expresan una posible noción de cuantificador universal.

REFERENCIAS

[1] J. L. Castiglioni, M. Menni M. and M. Sagastume, *On some categories of involutive centered residuated lattices*, Studia Logica **90** (2008), no. 1, 93–124.

[2] J. L. Castiglioni, R. Lewin and M. Sagastume, *On a definition of a variety of monadic l-groups* (por aparecer en Studia Logica).

[3] M. Lattanzi, *A note about U-operators on $(n+1)$-bounded Wajsberg algebras*, Actas del Quinto Congreso Dr. Antonio Monteiro, Universidad Nacional del Sur (1999), 95–107.

[4] M. Lattanzi, *Wajsberg algebras with a U-operator*, Multiple-Valued Logic and Soft Computing **10** (2004), no. 4, 315–338.

[5] M. Lattanzi, *$(N+1)$-bounded Wajsberg algebras with a U-operator*, Rep. Math. Logic **39** (2005), 89–111.

[6] M. Lattanzi and A. Petrovich, *Generalizing some constructions in Wajsberg algebras*. International Conference on Cybernetics and Informatics Technologies, Systems and Applications, USA (2004), 78–81.

Del principio finitista arquimedeano a la teoría de aritmos

José Cifuentes y Alejandro Petrovich

El principio finitista arquimedeano (PFA) es la siguiente propiedad sobre los números naturales: "Todo número natural positivo es suma finita de unos", que puede ser expresado heurísticamente del siguiente modo: *"entre dos números naturales diferentes existe un número finito de números naturales", es decir, para alcanzar un número natural desde otro se necesita solamente un número finito de pasos.*

Se prueba inmediatamente que PFA es equivalente al principio de inducción matemática y que esta equivalencia es el motivo para desarrollar otra teoría axiomática para la aritmética de Peano que contiene a PFA como uno de sus axiomas. El resto de los axiomas se expresan en un lenguaje de primer orden y expresan el hecho de que la estructura aditiva de los números naturales es un monoide cancelativo y que satisface la siguiente ley (ley de trivialidad): si $x+y=0$ entonces $x=y=0$. Por medio de estos axiomas introducimos en un contexto más general la noción de *aritmo*, como una estructura que satisface los mencionados axiomas y que contiene como ejemplos importantes a la estructura aditiva de los números naturales y a la estrucutura multiplicativa de los enteros positivos. En todo aritmo se puede introducir el concepto de elemento irreducible y de átomo. Un aritmo factorial es aquel en que todo elemento se escribe en forma única como producto de irreducibles, y damos una caracterización de estos aritmos. En el caso que la escritura no sea única los aritmos de denominan *débilmente factoriales*. En estos aritmos se prueba una versión generalizada del principio de inducción. Entre otros resultados importantes se destaca el hecho de que todo aritmo es el cono positivo de un grupo abeliano parcialmente ordenado en el que probaremos algunas propiedades funtoriales usando este resultado.

Comunicaciones de Matemática Aplicada

Estimaciones de error a posteriori para un problema singularmente perturbado

Ricardo G. Durán, Ariel L. Lombardi y Mariana I. Prieto

En este trabajo analizamos la aproximación numérica del siguiente problema singularmente perturbado de reacción–difusión, con convección dominante:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\varepsilon\nabla u - bu) + cu = f &\qquad \text{en } \Omega \\ u = 0 &\qquad \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

donde Ω es un dominio poligonal en $\mathbb{R}^2$, b es un vector constante, c y f son funciones suaves en Ω y ε es un parámetro positivo pequeño.

Se sabe que los métodos de elementos finitos estándares para problemas singularmente perturbados no producen buenos resultados cuando se utilizan mallas uniformes o cuasi-uniformes, salvo que sean suficientemente refinadas. Por ello, esta clase de mallas no son útiles en las aplicaciones prácticas. Una alternativa para tratar este tipo de problemas es el uso de métodos estándares sobre mallas adaptadas. En general, las mallas adaptadas deben obtenerse por algún tipo de control a posteriori.

En este trabajo construimos y analizamos este tipo de estimador de error, que obtenemos con el método de reconstrucción del flujo. Luego, a partir del estimador de error construimos una aproximación de la matriz hessiana de la solución, que utilizamos para definir un procedimiento de refinamiento adaptivo anisotrópico.

Presentamos algunos experimentos numéricos realizados en el paquete FreeFem++ que muestran el buen comportamiento del método.

Método quasi-Newton para optimización multiobjetivo

Gabriel Aníbal Carrizo*, Pablo Andrés Lotito** y María Cristina Maciel*

*Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur

**PLADEMA-CONICET, Universidad Nacional del Centro
de la Provincia de Buenos Aires

En este trabajo se considera el problema de optimización multiobjetivo sin restricciones y se propone un algoritmo quasi-Newton basado en la estrategia de región de confianza [2] y el método BFGS para optimización escalar [3]. Este método está basado en el método de Newton para optimización multiobjetivo [4] y, en particular, su versión utilizando región de confianza [1]. Dentro de las características más interesantes corresponde señalar que las ventajas computacionales que implica el uso de la aproximación de la matriz hessiana en lugar del cálculo exacto se ven multiplicados por la cantidad de funciones objetivo.

REFERENCIAS

[1] G.A. Carrizo, M.C. Maciel, *Estrategia de región de confianza para problemas de optimización multiobjetivo*, III MACI 2011, Bahía Blanca, Argentina.

[2] A. Conn, N.I.M. Gould, and Ph. Toint. *Trust-Region Methods*. SIAM-MPS, Philadelphia, Pennsylvania, 2000.

[3] J.E. Dennis and R.B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.

[4] J. Fliege, L.M. Graña Drummond, B.F. Svaiter, *Newton's method for multiobjective optimization*, SIAM J. Optim. 20 (2009), 602–626.