ACTAS DEL XII CONGRESO
DR. ANTONIO A. R. MONTEIRO (2013)
2014, Páginas 119–134

REPRESENTACIONES MODULARES IRREDUCIBLES DEL GRUPO SIMÉTRICO GENERALIZADO $\mathfrak{S}_n^m$

JOSÉ O. ARAUJO, LUIS C. MAIARÚ, AND MAURO NATALE

RESUMEN. En la década del '80, Farahat y Peel en [12] realizan las representaciones modulares para el grupo simétrico; un año después, al-Aamily, Morris y Peel en [1] lo hacen para un grupo de Weyl de tipo B_n. En ambos casos se apoyan en la teoría combinatoria. Usando métodos más geométricos, en [2] y [5] se presenta una realización de todas las representaciones modulares irreducibles de esta clase de grupos de Weyl. Este método es extendido en el presente artículo para el caso de un grupo de reflexiones complejo de tipo $G(m,1,n)$.

1. INTRODUCCIÓN

Las llamadas representaciones de Macdonald para grupos de Weyl fueron introducidas por Macdonald en [18]. Estas representaciones son irreducibles y se construyen a partir de la acción del grupo de Weyl sobre un sistema de raíces asociado con el grupo. Toda representación irreducible de un grupo de Weyl de tipo A_n o B_n puede ser realizada como una representación de Macdonald (ver Carter [8] o Lusztig [17]). Siguiendo las ideas de Macdonald, las representaciones modulares irreducibles fueron construidas en [2] para el grupo simétrico y en [5] para el grupo de Weyl de tipo B_n. También señalamos que la construcción de un modelo de Gelfand para el grupo de reflexiones complejo $G(m,1,n)$ dada en [4], se inspira en una familia de representaciones del grupo construidas a la manera de Macdonald; ver también [19].

Desde un punto de vista combinatorio, se realizan las representaciones modulares en [1] para el grupo simétrico y en [12] para un grupo de Weyl de tipo B_n.

La representaciones ordinarias del grupo $G(m,1,n)$, también conocido como grupo simétrico generalizado, fueron tratadas en [7, 11, 13, 20, 21, 22, 23].

El principal resultado de este trabajo se encuentra en el Teorema 3.2, donde extendemos la construcción dada en [2], para obtener una realización de representaciones modulares irreducibles del grupo $G(m,1,n)$.

En virtud de las construcciones presentadas en este artículo generalizando los elementos utilizados para el estudio de las representaciones modulares del grupo simétrico, es natural considerar los módulos $\mathfrak{M}_\Lambda$ definidos en (13), como los módulos de Specht para el grupo simétrico generalizado. En tal caso, como ocurre en la situación del grupo simétrico, los operadores Ω_Λ en (18) jugarían un papel importante en la descripción de los factores de descomposición, dando alguna información parcial de la matriz de descomposición. Seguramente resultados del grupo simétrico asociados con la determinación de los divisores elementales de la matriz de Cartan dado en [24] o sobre su determinante dado en [6], puedan ser extendidos para el grupo simétrico generalizado.

1.1. Notación y resultados preliminares. En esta sección introducimos los elementos que intervienen en la construcción de los módulos irreducibles y sus respectivas notaciones.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 20C30.

A lo largo de este artículo usaremos $\mathfrak{S}_n^m$ para notar de manera más compacta el grupo $G(m,1,n)$, el cual es también conocido como grupo simétrico generalizado. K será un cuerpo de característica $p \neq 2$. Denotaremos con $\mathscr{A}$ el anillo de polinomios $K[x_1,\ldots,x_n]$, y para cada $j \geqslant 0$, sea $\mathscr{A}_j$ el subespacio de $\mathscr{A}$ dado por los polinomios homogéneos de grado j. Así mismo, usaremos $\mathbb{I}_n$ para indicar el conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$ y $\mathfrak{S}_n$ para referirnos al grupo simétrico del conjunto $\mathbb{I}_n$.

En principio vamos a suponer que K contiene todas las raíces m-ésimas de la unidad, en particular se tiene que m y p son números coprimos. Para tratar el caso general, estas hipótesis serán reconsideradas sobre el final del artículo.

Por conveniencia, presentamos el grupo $\mathfrak{S}_n^m$ como el producto semidirecto

$$\mathfrak{S}_n^m = \mathscr{C}_m^n \rtimes \mathfrak{S}_n,$$

donde $\mathscr{C}_m \subset K$ es el grupo de raíces m-ésimas de la unidad.

Cada elemento $\sigma \in \mathfrak{S}_n^m$ tiene una única descomposición

$$\sigma = (d,\tau), \tag{1}$$

donde $d = (d_1,\ldots,d_n) \in \mathscr{C}_m^n$ y $\tau \in \mathfrak{S}_n$. De esta manera, el producto en $\mathfrak{S}_n^m$ viene dado por

$$(d,\tau)\cdot(h,\mu) = (dh^{\mu},\tau\mu),$$

siendo $h = (h_1,\ldots,h_n) \in \mathscr{C}_m^n$, $\mu \in \mathfrak{S}_n$ y $h^{\mu} = (h_{\mu(1)},\ldots,h_{\mu(n)})$.

Para simplificar la notación, cuando sea oportuno, se identificará $\mathscr{C}_m^n$ con $(\mathscr{C}_m^n,1)$ y $\mathfrak{S}_n$ con $(1,\mathfrak{S}_n)$, es decir d con $(d,1)$ y τ con $(1,\tau)$.

1.1.1. ***El carácter***. El carácter dado a continuación será utilizado para definir proyectores asociados con subgrupos de $\mathfrak{S}_n^m$.

Sea $\chi : \mathfrak{S}_n^m \to K$ el carácter lineal dado por:

$$\chi(d,\tau) = \left(\prod_{i=1}^{n} d_i\right)\operatorname{sgn}(\tau),$$

donde sgn es la función signo.

Observación 1.1. *En el caso que $K = \mathbb{C}$, el cuerpo de los números complejos, este carácter es precisamente el determinante de la representación geométrica de $\mathfrak{S}_m^n$ como un grupo generado por reflexiones unitarias (ver* [15]*). Luego, tenemos*

$$\chi(d) = \prod_{i=1}^{n} d_i \quad \textit{si } d \in \mathscr{C}_m^n,$$
$$\chi(\tau) = \operatorname{sgn}(\tau) \quad \textit{si } \tau \in S_n.$$

1.1.2. ***Subgrupos***. Como en el caso de característica cero, las representaciones irreducibles se asocian con subgrupos de $\mathfrak{S}_n^m$, razón por la cual aquí introducimos el tipo de subgrupo que se utilizarán en una posterior construcción de los módulos buscados.

Si $J \subset \mathbb{I}_n$, denotemos por $\mathfrak{S}_n^m(J)$ al subgrupo de $\mathfrak{S}_n^m$ dado por

$$\mathfrak{S}_n^m(J) = \{(d,\tau) \in \mathfrak{S}_n^m : d_k = 1 \text{ y } \tau(k) = k,\ \forall k \in \mathbb{I}_n - J\}. \tag{2}$$

Notemos que

$$\mathfrak{S}_n^m(J) = \mathscr{C}_m^n(J) \rtimes \mathfrak{S}_n(J),$$

donde $\mathfrak{S}_n(J)$ es el grupo de todas las permutaciones que fijan todos los elementos en $\mathbb{I}_n - J$ y $\mathscr{C}_m^n(J)$ es el subgrupo de $\mathscr{C}_m^n$ dado por

$$\mathscr{C}_m^n(J) = \{d \in \mathscr{C}_m^n : d_k = 1, \forall k \in \mathbb{I}_n - J\}.$$

1.1.3. ***Acción de $\mathfrak{S}_n^m$ en $\mathscr{A}$ y la forma bilineal.*** En todo lo que sigue, llamaremos $\mathscr{M} = \{\alpha : \mathbb{I}_n \to \mathbb{N}_0\}$ al conjunto de multi-índices y usaremos la notación

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \quad \text{si } \alpha \in \mathscr{M}.$$

Hay una acción natural de $\mathfrak{S}_n^m$ en el anillo de polinomios $\mathscr{A}$, como así también en su espacio dual $\mathscr{A}^*$, que les da una estructura de $\mathfrak{S}_n^m$-módulos. Esta acción se describe como sigue:

Consideremos $\mathfrak{S}_n$ actuando sobre el conjunto de multi-índices $\mathscr{M}$ mediante

$$\tau \cdot \alpha = \alpha \circ \tau^{-1} \quad \text{si } \tau \in \mathfrak{S}_n. \tag{3}$$

Esto induce una acción de $\mathfrak{S}_n^m$ sobre el anillo de polinomios $\mathscr{A}$ dada por

$$(d, \tau) \cdot x^\alpha = \prod_{i=1}^{n} (d_i x_i)^{(\tau \cdot \alpha)_i}, \tag{4}$$

donde $\alpha \in \mathscr{M}$. En particular, para $\tau \in \mathfrak{S}_n$ y $d \in \mathscr{C}_m^n$ se tiene:

$$\begin{aligned} \tau \cdot x^\alpha &= x_{\tau^{-1}(1)}^{\alpha_1} \cdots x_{\tau^{-1}(n)}^{\alpha_n} \\ d \cdot x^\alpha &= d^\alpha x^\alpha. \end{aligned}$$

Por otra parte, si $\varphi \in \mathscr{A}^*$ resulta:

$$(\sigma \cdot \varphi)(P) = \varphi\left(\sigma^{-1} P\right) \quad \forall P \in \mathscr{A}.$$

Si identificamos $\mathfrak{S}_n$ con un subgrupo $\{1\} \times \mathfrak{S}_n$ de $\mathfrak{S}_n^m$, es claro que la acción definida extiende la acción natural del grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$ sobre el anillo polinomios $\mathscr{A}$.

Usaremos la forma K-bilineal $\langle -, - \rangle$ definida sobre $\mathscr{A}$ a partir de las identidades

$$\left\langle x^\alpha, x^\beta \right\rangle = \delta_{\alpha,\beta}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathscr{M}$ y δ es la función de Kronecker.

Observación 1.2. *Notar que esta forma bilineal es invariante bajo la acción del grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$, es decir:*

$$\left\langle \tau \cdot x^\alpha, \tau \cdot x^\beta \right\rangle = \left\langle x^\alpha, x^\beta \right\rangle$$

para cada $\tau \in \mathfrak{S}_n$.

1.1.4. ***Multiparticiones.*** Las multiparticiones se introducen como los parámetros naturales para enumerar las clases de conjugación de $\mathfrak{S}_n^m$, tal como se enuncia en la Proposición 1.5.

Si λ es una partición de n, podemos denotarla como $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ con $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_l$, o bien como $\lambda = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \ldots, n^{m_n})$, donde

$$m_i = |\{j : \lambda_j = i\}|.$$

Una partición $\lambda = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \ldots, n^{m_n})$ de n es llamada p-regular si

$$m_j < p \quad \text{para } j = 1, \ldots, n.$$

Una clase de conjugación de un grupo finito es llamada p-regular si p no divide al orden de un elemento de la clase.

Observación 1.3. *Para el grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$, el número de representaciones modulares irreducibles no equivalentes coincide con el número de clases de conjugación p-regulares de $\mathfrak{S}_n$ (*[14, Teorema 11.5]*). Para un grupo finito general, esto es verdadero si K es cuerpo de descomposición para G; ver* [10, Teorema 21.25 y pág. 492].

Definición 1.4. *Una m-partición* Λ *de n es una m-upla* $\left(\mu^0,\ldots,\mu^{m-1}\right)$ *donde cada* μ^i *es una partición y*

$$\sum_{i=0}^{m-1}\left|\mu^i\right| = n.$$

La m-partición es llamada p-regular si todas las particiones μ^i *son p-regulares.*

Es oportuno aclarar que se admiten particiones de cero entre las μ^i. En tal caso, la partición se tomaría con un solo término.

Los resultados siguientes serán utilizados más adelante; estos son conocidos y se presentan sin demostración.

Proposición 1.5. *Hay una correspondencia biyectiva entre las clases de conjugación de* $\mathfrak{S}_n^m$ *y las m-particiones de n.*

Demostración. Ver 3.7 en [16]. □

Lema 1.6. *El número de particiones p-regulares de n coincide con el número de clases de conjugación p-regulares de* $\mathfrak{S}_n$.

Demostración. Ver Lema 10.2 en [14]. □

Observación 1.7. *Al igual que las permutaciones, cada elemento en* $\mathfrak{S}_n^m$ *puede ser factorizado unívocamente, salvo reordenamiento, como un producto de ciclos disjuntos, donde hay m clases distintas de estos ciclos. Esta es la razón por la cual las clases de conjugación de* $\mathfrak{S}_n^m$ *son indexadas por m-particiones de n y consecuentemente, las clases de conjugación p-regulares son indexadas por m-particiones p-regulares, ver 3.7 en* [16].

1.2. Los módulos $\mathfrak{N}_\lambda$ y $\mathfrak{N}_\Lambda$. Como se ha indicado anteriormente, hasta el final de la última sección se asumirá que p no divide a m; después de esto, el caso general no presenta mayor dificultad y será tratado sobre el final del artículo.

En esta sección introducimos los módulos: $\mathfrak{M}_\lambda$ asociado con el grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$ y $\mathfrak{M}_\Lambda$ asociado con el grupo $\mathfrak{S}_n^m$. Luego definimos $\mathfrak{N}_\lambda$ y $\mathfrak{N}_\Lambda$, que son espacios de funcionales lineales en $\mathfrak{M}_\lambda$ y $\mathfrak{M}_\Lambda$ respectivamente, sobre los cuales se realizarán las representaciones modulares irreducibles de $\mathfrak{S}_n$ y $\mathfrak{S}_n^m$. Es conveniente tener en cuenta lo que ocurre en el caso del grupo simétrico ya que se extiende la construcción para el grupo $\mathfrak{S}_n^m$, a partir de un hecho clave dado en el Teorema 2.3 de [2].

Cuando K es un cuerpo de característica 0, no es difícil mostrar que $\mathfrak{M}_\lambda \simeq \mathfrak{N}_\lambda$ como $\mathfrak{S}_n$-módulos y $\mathfrak{M}_\Lambda \simeq \mathfrak{N}_\Lambda$ como $\mathfrak{S}_n^m$-módulos.

Para cada conjunto no vacío $C = \{c_1,\ldots,c_k\}$ de $\mathbb{I}_n$, donde $c_1 < \cdots < c_k$, denotamos con $V_C(x_1,\ldots,x_n)$ el usual determinante de Vandermonde

$$V_C = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant k}\left(x_{c_j}-x_{c_i}\right).$$

Asociamos con cada partición $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$ de n, un subconjunto $\mathscr{O}_\lambda$ de $\mathscr{M}$ dado por

$$\alpha\in\mathscr{O}_\lambda \Leftrightarrow \left|\alpha^{-1}(0)\right| = \lambda_1, \left|\alpha^{-1}(1)\right| = \lambda_2,\ldots,\left|\alpha^{-1}(r-1)\right| = \lambda_r.$$

Es claro que $\mathscr{O}_\lambda$ es una $\mathfrak{S}_n$-órbita en $\mathscr{M}$ con la acción dada en (3).

Para cada l, $1\leqslant l\leqslant \lambda_1 = u$, consideramos el subconjunto $C_{\lambda,l}$ dado por

$$C_{\lambda,l} = \left\{ i\in\mathbb{I}_n : \sum_{j=1}^{l-1}\lambda'_j + 1 \leqslant i \leqslant \sum_{j=1}^{l}\lambda'_j \right\}, \tag{5}$$

donde $\lambda' = (\lambda'_1,\ldots,\lambda'_u)$ es la partición *conjugada* de λ.

Ahora, definimos $e_\lambda \in \mathscr{A}$ y $\alpha_\lambda \in \mathscr{M}$ como:

$$e_\lambda = \prod_{l=1}^{u} V_{C_{\lambda,l}}(x_1,\dots,x_n) \tag{6}$$

y

$$\alpha_\lambda(i) = i-1-\sum_{j=1}^{l-1}\lambda'_j \quad \text{si } i \in C_{\lambda,l}. \tag{7}$$

Observación 1.8. *Notar que para $\alpha \in \mathscr{M}$, los valores $\left|\alpha^{-1}(i)\right|$ con $i \in \mathbb{N}_0$ dan lugar a una partición λ de n. Esto permite definir la partición $C_{\lambda,l}$ de $\mathbb{I}_n$ y consecuentemente el multi-índice α_λ como en (7). Ahora, si α y β están en una misma $\mathfrak{S}_n$-órbita, es claro que $\alpha_\lambda = \beta_\lambda$ dado que ambos definen la misma partición de n.*

Proposición 1.9. *Sea $\mathfrak{S}_\lambda$ el subgrupo de $\mathfrak{S}_n$ definido como*

$$\mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{S}_{\lambda'_1}\left(C_{\lambda,1}\right)\times\cdots\times\mathfrak{S}_{\lambda'_u}\left(C_{\lambda,u}\right);$$

entonces

$$\left(\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_\lambda}\operatorname{sgn}(\tau)\,\tau\right)x^{\alpha_\lambda} = e_\lambda. \tag{8}$$

Demostración. Resulta del siguiente hecho: Dado un subconjunto no vacío $C = (c_1,\dots,c_k)$ de $\mathbb{I}_n$, donde $c_1 < \cdots < c_k$, y $\alpha_C \in \mathscr{M}$ definido por:

$$\alpha_C(j) = \begin{cases} h-1 & \text{si } j = c_h \\ 0 & \text{si } j \notin C \end{cases}$$

entonces

$$\left(\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_\lambda}\operatorname{sgn}(\tau)\,\tau\right)x^{\alpha_C} = V_C(x_1,\dots,x_n).$$

Descomponiendo $\alpha_\lambda = \sum_{l=1}^{u}\alpha_\lambda^{(l)}$, donde:

$$\alpha_\lambda^{(l)}(j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \notin C_{\lambda,l} \\ \alpha_\lambda(j) & \text{si } j \in C_{\lambda,l} \end{cases}$$

se tiene:

$$x^{\alpha_\lambda} = \prod_{l=1}^{u} x^{\alpha_\lambda^{(l)}}$$

y factorizando:

$$\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_\lambda}\operatorname{sgn}(\tau)\,\tau = \prod_{l=1}^{u}\left(\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\lambda'_l}(C_{\lambda,l})}\operatorname{sgn}(\tau)\,\tau\right)$$

resulta:

$$\left(\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_\lambda}\operatorname{sgn}(\tau)\,\tau\right)x^{\alpha_\lambda} = \prod_{l=1}^{u}\left(\left(\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\lambda'_l}(C_{\lambda,l})}\operatorname{sgn}(\tau)\,\tau\right)x^{\alpha_\lambda^{(l)}}\right).$$

Por lo observado anteriormente, es:

$$\left(\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{\lambda'_l}(C_{\lambda,l})}\operatorname{sgn}(\tau)\,\tau\right)x^{\alpha_\lambda^{(l)}} = V_{C_{\lambda,i}}(x_1,\dots,x_n).$$ □

Asociamos con cada $\mathfrak{S}_n$-órbita γ en $\mathscr{M}$, el subespacio de $\mathscr{A}$

$$S_\gamma = \left\{ \sum_{\alpha\in\gamma} a_\alpha x^\alpha,\ a_\alpha \in K \right\}. \tag{9}$$

Definición 1.10. *Si λ es una partición de n, definimos $\mathfrak{M}_\lambda$ como el subespacio de $\mathscr{A}$ generado por la $\mathfrak{S}_n$-órbita de e_λ, es decir*

$$\mathfrak{M}_\lambda = \langle \tau e_\lambda : \tau \in \mathfrak{S}_n \rangle.$$

Observación 1.11. *Si K es un cuerpo de característica* 0 *y $\lambda' = (\lambda_1', \ldots, \lambda_u')$, e_λ coincide con el producto de las funcionales lineales asociadas a un conjunto de raíces positivas de un subgrupo de Weyl de tipo*

$$A_{\lambda_1'-1} \times \cdots \times A_{\lambda_u'-1}. \tag{10}$$

En este caso, según [18], *$\mathfrak{M}_\lambda$ da lugar a una representación de Macdonald para $\mathfrak{S}_n$, considerado como un grupo de Weyl de tipo A_{n-1}, y la misma está asociada a un subgrupo de tipo dado en (10); ver* [8] *o* [17].

El $\mathfrak{S}_n$-módulo $\mathfrak{M}_\lambda$ también puede ser presentado como se indica a continuación. Sea δ el operador diferencial definido por

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i};$$

entonces

$$\mathfrak{M}_\lambda = \left\{ P \in S_\gamma \mid \delta(P) = 0 \right\},$$

donde γ es la $\mathfrak{S}_n$-órbita de α_λ, conforme se establece en el Teorema 4.2 de [3].

Sea $\Lambda = \left(\mu^0, \ldots, \mu^{m-1}\right)$ una m-partición de n y para cada i, $0 \leqslant i < m$, $q_i = \left|\mu^i\right|$ y pongamos

$$p_0 = 0 \quad \text{y} \quad p_i = \sum_{j<i} q_j.$$

Definimos $e_\Lambda \in \mathscr{A}$ como

$$e_\Lambda(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=0}^{m-1} \left(x_{p_i+1} \cdots x_{p_i+q_i}\right)^i e_{\mu^i}\left(x_{p_i+1}^m \cdots x_{p_i+q_i}^m\right) \tag{11}$$

y $\alpha_\Lambda \in \mathscr{M}$ dada por

$$\alpha_\Lambda(j) = m\alpha_{\mu^i}(j - p_i) + i, \qquad \text{si } p_i + 1 \leqslant j \leqslant p_i + q_i = p_{i+1}. \tag{12}$$

donde α_{μ^i} es como en (7).

Ahora, si $\gamma = \mathscr{O}_{\alpha_\Lambda}$ es la $\mathfrak{S}_n$-órbita de α_Λ en $\mathscr{M}$, es claro que $e_\Lambda \in S_\gamma$, donde S_γ es como se dio en (9).

Observación 1.12. *Puesto que la función $\mu^i \longrightarrow \alpha_{\mu^i}$ que asigna particiones a un multi-índice es inyectiva, según se hizo notar en la Observación 1.8, también es inyectiva la función $\Lambda \longrightarrow \alpha_\Lambda$ dada en (12), que asigna una m-partición a un multi-índice. Cada $\alpha \in \mathscr{M}$ da lugar a una m-partición $\Lambda = \left(\mu^0, \ldots, \mu^{m-1}\right)$ de n donde cada μ^i se obtiene de la sucesión $\left|\beta^{-1}(km+i)\right|_{k\geqslant 0}$, y Λ tiene asociado a α_Λ como en (12). Si α y β están en una misma $\mathfrak{S}_n$-órbita, entonces $\alpha_\Lambda = \beta_\Lambda$.*

Ejemplo 1.13. *Consideremos la* 3*-partición* Λ *de* 8 *dada por* $\left(\mu^0, \mu^1, \mu^2\right)$*, donde:*

$$\mu^0 = (2,1), \quad \mu^1 = (0), \quad \mu^2 = (2,2,1).$$

Se tiene $q_0 = 3$*,* $q_1 = 0$*,* $q_2 = 5$*, de donde* $\mathscr{C}_{\mu^0,1} = \{1,2\}$*,* $\mathscr{C}_{\mu^0,2} = \{3\}$*,* $\mathscr{C}_{\mu^1} = \varnothing$*,* $\mathscr{C}_{\mu^2,1} = \{4,5\}$*,* $\mathscr{C}_{\mu^2,2} = \{6,7\}$ *y* $\mathscr{C}_{\mu^2,3} = \{8\}$*. Ahora:*

$$\alpha_\Lambda = (0,3,0,2,5,8,2,5)$$

teniendo que:

$$\begin{aligned} e_\Lambda &= V_{\{1,2\}}\left(x_1^3, \ldots, x_8^3\right)(x_4x_5x_6x_7x_8)^2 V_{\{4,5,6\}}\left(x_1^3, \ldots, x_8^3\right) V_{\{7,8\}}\left(x_1^3, \ldots, x_8^3\right) \\ &= \left(x_2^3 - x_1^3\right)(x_4x_5x_6x_7x_8)^2\left(x_6^3 - x_5^3\right)\left(x_6^3 - x_4^3\right)\left(x_5^3 - x_4^3\right)\left(x_8^3 - x_7^3\right). \end{aligned}$$

Definición 1.14. *Si* Λ *es una m-partición de n, definimos* $\mathfrak{M}_\Lambda$ *como el subespacio de* $\mathscr{A}$ *generado por la* $\mathfrak{S}_n$*-órbita de* e_Λ*, es decir,*

$$\mathfrak{M}_\Lambda = \langle \sigma e_\Lambda : \sigma \in \mathfrak{S}_n \rangle. \tag{13}$$

Sea Δ el operador diferencial

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^m}{\partial x_i^m}.$$

Como ocurre con el grupo simétrico, en este caso por el Teorema 2.5 dado en [4] se tiene:

$$\mathfrak{M}_\Lambda = \{P \in S_\Gamma \mid \Delta(P) = 0\}.$$

1.2.1. ***Los espacios*** $\mathfrak{N}_\lambda$ ***y*** $\mathfrak{N}_\Lambda$. Hacemos notar que el grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$ se identifica con $G(1,1,n) = \mathfrak{S}_n^1$.

Para cada partición λ de n, consideramos $f_\lambda \in \mathfrak{M}_\lambda^*$, el espacio dual de $\mathfrak{M}_\lambda$, definida por

$$f_\lambda(P) = \langle P, e_\lambda \rangle \qquad (P \in \mathfrak{M}_\lambda). \tag{14}$$

Usando la acción canónica de $\mathfrak{S}_n$ sobre $\mathfrak{M}_\lambda^*$, definimos $\mathfrak{N}_\lambda$ como el subespacio de $\mathfrak{M}_\lambda^*$ generado por la $\mathfrak{S}_n$-órbita de f_λ, es decir

$$\mathfrak{N}_\lambda = \langle \tau f_\lambda : \tau \in \mathfrak{S}_n \rangle.$$

Análogamente, para cada m-partición $\Lambda = \left(\mu^0, \ldots, \mu^{m-1}\right)$ de n consideramos $f_\Lambda \in \mathfrak{M}_\Lambda^*$, el espacio dual de $\mathfrak{M}_\Lambda$, dado por

$$f_\Lambda(P) = \langle P, e_\Lambda \rangle \qquad (P \in \mathfrak{M}_\Lambda).$$

Con la acción canónica de $\mathfrak{S}_n^m$ sobre $\mathfrak{M}_\Lambda^*$, definimos $\mathfrak{N}_\Lambda$ como el subespacio de $\mathfrak{M}_\Lambda^*$ generado por la $\mathfrak{S}_n$-órbita de f_Λ, es decir,

$$\mathfrak{N}_\Lambda = \langle \tau f_\Lambda : \tau \in \mathfrak{S}_n \rangle.$$

Observación 1.15. *Dada la invarianza de la forma bilineal por la acción de* $\mathfrak{S}_n$*, observada en 1.2, se tiene:*

$$(\tau f_\Lambda)(P) = f_\Lambda\left(\tau^{-1}P\right) = \left\langle \tau^{-1}P, e_\Lambda \right\rangle = \langle P, \tau e_\Lambda \rangle$$

para $\tau \in \mathfrak{S}_n$ *y* $P \in \mathfrak{M}_\Lambda$*. Luego, todo elemento* $g \in \mathfrak{N}_\Lambda$ *puede ser representado como:*

$$g(P) = \langle P, Q \rangle$$

para algún $Q \in \mathfrak{M}_\Lambda$*.*

Con una notación un tanto diferente, podemos encontrar el siguiente resultado en [2, Lema 2.2 y Teorema 2.3].

Teorema 1.16. *Manteniendo las notaciones previas tenemos:*

i) Si λ es p-regular, luego $\mathfrak{N}_\lambda \neq 0$.
ii) Si $\mathfrak{N}_\lambda \neq \{0\}$, $\mathfrak{N}_\lambda$ es un $\mathfrak{S}_n$-módulo irreducible.
iii) Si λ y μ son particiones p-regulares y $\lambda \neq \mu$, entonces $\mathfrak{N}_\lambda \not\simeq \mathfrak{N}_\mu$.
iv) Todo $\mathfrak{S}_n$-módulo simple es isomorfo a $\mathfrak{N}_\lambda$ para alguna partición p-regular λ de n.

En la prueba del Teorema 1.16, un idempotente en $K\mathfrak{S}_n$ juega un rol primordial. De modo análogo, para establecer un resultado similar en el caso de $\mathfrak{S}_n^m$, definimos los idempotentes Ω_Λ y Ω_Λ^* en $K\mathfrak{S}_n^m$como se describe a continuación.

Dada $\Lambda = \left(\mu^0, \ldots, \mu^{m-1}\right)$ una m-partición de n, con

$$\mu^i = \left(\mu_1^i, \ldots, \mu_r^i\right) \quad \text{y} \quad \left|\mu^i\right| = q_i$$

y

$$p_0 = 0 \quad \text{y} \quad p_i = \sum_{j<i} q_j$$

y como en (5), definimos para cada l, $1 \leqslant l \leqslant \mu_1^i = r_i$, el subconjunto $C_{\Lambda,i,l}$ dado por

$$C_{\Lambda,i,l} = \left\{ k \in \{p_i+1, \ldots, p_i+q_i\} : \sum_{j=1}^{l-1} \left(\mu^i\right)'_j + 1 \leqslant k - p_i \leqslant \sum_{j=1}^{l} \left(\mu^i\right)'_j \right\}.$$

Luego tenemos

$$e_\Lambda = \prod_{i=0}^{m-1} \left(\left(x_{p_i+1} \cdots x_{p_i+q_i}\right)^i \prod_{l=1}^{r_i} V_{C_{\Lambda,i,l}} \left(x_{p_i+1}^m, \ldots, x_{p_i+q_i}^m\right) \right). \tag{15}$$

Sea $\mathscr{H}_\Lambda \subseteq \mathfrak{S}_n^m$ el subgrupo definido por

$$\mathscr{H}_\Lambda = \bigtimes_{i=0}^{m-1} \left(\bigtimes_{l=1}^{r_i} \mathfrak{S}_m^n \left(C_{\Lambda,i,l}\right) \right), \tag{16}$$

donde $\mathfrak{S}_n^m \left(C_{\Lambda,i,l}\right)$ es como se definió en (2). Dado que cada elemento $\sigma \in \mathfrak{S}_n^m$ tiene una única descomposición como $\sigma = (d, \tau)$ con $d \in \mathscr{C}_m^n$ y $\tau \in \mathfrak{S}_n$, el subgrupo $\mathscr{H}_\Lambda$ también tiene una descomposición como

$$\mathscr{H}_\Lambda = \mathscr{C}_m^\Lambda \rtimes \mathfrak{S}_\Lambda, \tag{17}$$

donde

$$\mathfrak{S}_\Lambda = \prod_{i=0}^{m-1} \left(\prod_{l=1}^{r_i} \mathfrak{S}_n^1 \left(C_{\Lambda,i,l}\right) \right)$$

y

$$\mathscr{C}_m^\Lambda = \prod_{i=0}^{m-1} \left(\prod_{l=1}^{r_i} \mathscr{C}_m^n \left(C_{\Lambda,i,l}\right) \right).$$

Cada $d \in \mathscr{C}_\Lambda$ puede ser factorizado en forma única como

$$d = d_0 d_1 \cdots d_{m-1},$$

donde d_i está en $\prod_{l=1}^{r_i} \mathscr{C}_m^n \left(C_{\Lambda,i,l}\right)$. Designamos con χ_Λ el carácter lineal de $\mathscr{H}_\Lambda$ dado por

$$\chi_\Lambda (d, \tau) = \left(\prod_{i=0}^{m-1} \chi \left(d_i\right)^i \right) \operatorname{sgn}(\tau).$$

Finalmente definimos los operadores Ω_Λ y Ω_Λ^* en $K\mathfrak{S}_n^m$ dados por

$$\Omega_\Lambda = \frac{1}{|\mathscr{C}_\Lambda|} \sum_{\sigma \in \mathscr{H}_\Lambda} \chi_\Lambda(\sigma)^{-1} \sigma, \tag{18}$$

$$\Omega_\Lambda^* = \frac{1}{|\mathscr{C}_\Lambda|} \sum_{\sigma \in \mathscr{H}_\Lambda} \chi_\Lambda(\sigma) \sigma.$$

Observación 1.17. *Una reflexión s en un espacio vectorial es un endomorfismo diagonalizable tal que el espacio de puntos fijos de s es un hiperplano. Actuando sobre $\mathscr{A}_1$, el espacio de polinomios homogéneos de grado 1, $\mathscr{H}_\Lambda$ se representa como un grupo de reflexiones, es decir que generado por reflexiones. Si $K = \mathbb{C}$ es el cuerpo de los números complejos, a partir de (16), se tiene que un conjunto de raíces para $\mathscr{H}_\Lambda$ está dado por:*

$$\begin{array}{ll} x_j & \text{con } j \geqslant |\mu_0| \\ x_j - \zeta x_k & \text{con } j < k,\ j,k \in C_{\Lambda,i,l}, \end{array}$$

donde ζ es raíz m-ésima de la unidad. Toda raíz de $\mathscr{H}_\Lambda$ se obtiene como un múltiplo escalar de alguna de estas, ver 2.5 en [9]. *De (15), el polinomio e_Λ se factoriza como producto de todas las funcionales lineales en el sistema de raíces de $\mathscr{H}_\Lambda$, donde las funcionales x_i están tomadas con ciertas multiplicidades. De modo que*

$$e_\Lambda = \prod_{i=0}^{m-1} \left\{ (x_{p_i+1} \dots x_{p_i+q_i})^i \times \prod_{l=1}^{r_i} \left[\prod_{j,k \in C_{\Lambda,i,l}, j<k} \left(x_k^m - x_j^m\right) \right] \right\}. \tag{19}$$

Proposición 1.18. *Conservando las notaciones precedentes, para cada m-partición $\Lambda = \left(\mu^0, \dots, \mu^{m-1}\right)$ de n, se tiene*

i)

$$\tau \Omega_\Lambda = \Omega_\Lambda \tau = \chi_\Lambda(\tau) \Omega_\Lambda \qquad \forall \tau \in \mathscr{H}_\Lambda.$$

ii)

$$\Omega_\Lambda = \frac{1}{|\mathscr{C}_\Lambda|} \left(\sum_{d \in \mathscr{C}_\Lambda} \chi_\Lambda(d)^{-1} d \right) \left(\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_\Lambda} \operatorname{sgn}(\tau) \tau \right),$$

$$\Omega_\Lambda^* = \frac{1}{|\mathscr{C}_\Lambda|} \left(\sum_{d \in \mathscr{C}_\Lambda} \chi_\Lambda(d) d \right) \left(\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_\Lambda} \operatorname{sgn}(\tau) \tau \right).$$

iii)

$$\Omega_\Lambda(x^{\alpha_\Lambda}) = e_\Lambda.$$

Demostración. i) Esta identidad resulta clara de la definición de Ω_Λ.

ii) Es una consecuencia de la descomposición (17).

iii) Por (8), tenemos:

$$\left(\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_\Lambda} \operatorname{sgn}(\tau) \tau \right) (x^{\alpha_\Lambda}) = e_\Lambda. \tag{20}$$

Ya que cada elemento $d \in \mathscr{C}_\Lambda$ puede ser factorizado como $d = (d_0, \dots, d_{m-1})$, donde

$$d_i \in \left(\prod_{l=1}^{r_i} \mathscr{C}_{m,i}^n(C_{\Lambda,i,l}) \right),$$

tenemos

$$d\left(e_\Lambda\right)=\left(\prod_{i=0}^{m-1}\chi^i\left(d_i\right)\right)e_\Lambda=\chi_\Lambda\left(d\right)e_\Lambda.$$

Así

$$\left(\sum_{d\in\mathscr{C}_\Lambda}\chi_\Lambda\left(d\right)^{-1}d\right)e_\Lambda=\left|\mathscr{C}_\Lambda\right|e_\Lambda$$

y *iii)* queda demostrado. □

Con la misma notación usada en (15) tenemos el siguiente lema.

Lema 1.19. *Sea τ una reflexión de orden k en $\mathscr{A}_1$ y r una raíz de τ. Si $P\in\mathscr{A}$ es tal que*

$$\tau\left(P\right)=\det\left(\tau\right)^jP$$

para algún $j<k$, entonces r^j es un factor de P.

Demostración. De las hipótesis se tiene que $\tau\left(r\right)=\zeta r$ con ζ una raíz k-ésima primitiva de unidad. Fijamos $\varphi_1=r$, $\varphi_2,\ldots,\varphi_n$ una base de $\mathscr{A}_1$, donde $\varphi_2,\ldots,\varphi_n$ es una base del hiperplano reflexivo de τ, es decir $\tau\left(\varphi_i\right)=\varphi_i$ para $i\geqslant 2$. Podemos expresar P como

$$P=\sum_{\alpha\in\mathscr{M}}\lambda_\alpha\varphi^\alpha,$$

donde $\varphi^\alpha=\varphi_1^{\alpha_1}\cdots\varphi_n^{\alpha_n}$.

Como $\det\left(\tau\right)=\zeta$, de la identidad $\tau\left(P\right)=\det\left(\tau\right)^jP$ se tiene

$$\sum_{\alpha\in\mathscr{M}}\zeta^{\alpha_1}\lambda_\alpha\varphi^\alpha=\zeta^j\sum_{\alpha\in\mathscr{M}}\lambda_\alpha\varphi^\alpha,$$

de modo que

$$\alpha_1\equiv j\mod(k),\qquad\forall\lambda_\alpha\neq 0.$$

Luego α_1 es de la forma $j+hk$, con $h\geqslant 0$, de modo que $\alpha_1\geqslant j$ cada vez que $\lambda_\alpha\neq 0$; luego $r^j=\varphi_1^j$ es un factor de P. □

Corolario 1.20. *Si $P\in\mathscr{A}$, entonces e_Λ es un factor de $\Omega_\Lambda\left(P\right)$.*

Demostración. En virtud de la Proposición 1.18 *i)*, resulta

$$\sigma\Omega_\Lambda\left(P\right)=\chi_\Lambda\left(\sigma\right)\Omega_\Lambda\left(P\right),\qquad\forall\sigma\in\mathscr{H}_\Lambda.$$

Para una reflexión $\tau\in\mathscr{H}_\Lambda$ se tiene:

$$\begin{aligned}\tau\Omega_\Lambda\left(P\right)&=\det\left(\tau\right)^j\Omega_\Lambda\left(P\right)\quad\text{si } x_k \text{ es raíz de } \tau \text{ con } p_j<k\leqslant p_{j+1},\\ \tau\Omega_\Lambda\left(P\right)&=\det\left(\tau\right)\Omega_\Lambda\left(P\right)\quad\text{si la raíz de } \tau \text{ es de la forma } x_j-\zeta x_k.\end{aligned}$$

En el primer caso, tomando τ una reflexión de orden m, del lema previo se sigue que x_k^j es un divisor de $\Omega_\Lambda\left(P\right)$. En el segundo caso τ es una reflexión de orden 2, también por el lema, $x_j-\zeta x_k$ es un divisor de $\Omega_\Lambda\left(P\right)$. En consecuencia, teniendo en cuenta la expresión de e_Λ en (19), se observa que los distintos factores de e_Λ en el conjunto

$$\left\{\left(x_j-\zeta x_k\right)\right\}_{j,k\in C_{\Lambda,i,l},\,j<k}\cup\left\{x_j^i\right\}_{p_i+1\leqslant j\leqslant p_i+q_i}$$

son todos ellos factores de $\Omega_\Lambda\left(P\right)$. Pero dado que las raíces son factores irreducibles no asociados y $\mathscr{A}$ es un dominio de factorización única, resulta que e_Λ es un factor de $\Omega_\Lambda\left(P\right)$. □

En lo que sigue $\mathrm{gr}(P)$ denotará el grado del polinomio P.

Proposición 1.21. *Sean* $\Lambda = \left(\mu^0, \ldots, \mu^{m-1}\right)$ *una m-partición de n y* $P \in \mathscr{A}$. *Considerando la acción de* Ω_Λ *sobre* $\mathscr{A}$ *dada por (4) y sobre* $\mathfrak{N}_\Lambda$ *dada por la restricción de la acción usual sobre* $\mathfrak{M}_\Lambda^*$, *tenemos:*

i) $\Omega_\Lambda(P) = e_\Lambda Q$, *donde Q es un polinomio* $\mathscr{H}_\Lambda$*-invariante.*

ii) Si $\mathrm{gr}(P) = \mathrm{gr}(e_\Lambda)$, *entonces*

$$\Omega_\Lambda(P) = \langle P, e_\Lambda \rangle e_\Lambda.$$

iii) Para cada $\varphi \in \mathfrak{N}_\Lambda$

$$\Omega_\Lambda^*(\varphi) = \varphi(e_\Lambda) f_\Lambda,$$

donde f_Λ *es como se definió en (14).*

Demostración. i) Por la Proposición 1.18, para cada $\tau \in \mathscr{H}_\Lambda$ tenemos

$$\tau\Omega_\Lambda = \chi_\Lambda(\tau)\Omega_\Lambda \qquad \text{y} \qquad \Omega_\Lambda(x^{\alpha_\Lambda}) = e_\Lambda.$$

Luego

$$\tau\Omega_\Lambda(P) = \chi_\Lambda(\tau)\Omega_\Lambda(P).$$

En particular, esta identidad es válida para toda reflexión en $\mathscr{H}_\Lambda$, de modo que por el Lema 1.19 resulta

$$\Omega_\Lambda(P) = e_\Lambda Q.$$

Por otra parte, aplicando $\tau \in \mathscr{H}_\Lambda$ en ambos miembros de la identidad anterior, se tiene

$$\begin{aligned}\chi_\Lambda(\tau) e_\Lambda Q = \chi_\Lambda(\tau)\Omega_\Lambda(P) &= \tau\Omega_\Lambda(P)\\ &= \tau(e_\Lambda Q) = \tau(e_\Lambda)\tau(Q)\\ &= \chi_\Lambda(\tau) e_\Lambda \tau(Q),\end{aligned}$$

es decir Q es $\mathscr{H}_\Lambda$-invariante.

ii) Por la linealidad de Ω_Λ, es suficiente probar que para cada $\alpha \in \mathscr{M}$ tal que $|\alpha| = \mathrm{gr}(e_\Lambda)$

$$\Omega_\Lambda(x^\alpha) = \langle x^\alpha, e_\Lambda \rangle e_\Lambda. \tag{21}$$

Por la identidad dada en la Proposición 1.18

$$\Omega_\Lambda(x^{\alpha_\Lambda}) = e_\Lambda.$$

Se tiene que si α no pertenece a la $\mathfrak{S}_n$-órbita de α_Λ, resulta

$$\langle x^\alpha, e_\Lambda \rangle = 0.$$

Por otra parte, dado que $\mathrm{gr}(\Omega_\Lambda(x^\alpha)) = \mathrm{gr}(e_\Lambda)$, por *i)* existe $\lambda \in K$ tal que

$$\Omega_\Lambda(x^\alpha) = \lambda e_\Lambda.$$

Como x^α y x^{α_Λ} están en diferentes $\mathfrak{S}_n$-órbitas, debe ser $\lambda = 0$ y luego (21) queda probado cuando α no pertenece a la $\mathfrak{S}_\Lambda$-órbita de α_Λ.

Si α está en la $\mathfrak{S}_n$-órbita de α_Λ, hay $\tau \in \mathfrak{S}_n$ tal que

$$x^\alpha = \tau x^{\alpha_\Lambda}.$$

Luego

$$\Omega_\Lambda(x^\alpha) = \Omega_\Lambda(\tau x^{\alpha_\Lambda}) = \mathrm{sgn}(\tau) e_\Lambda.$$

Ya que el coeficiente de τx^{α_Λ} en la descomposición monomial de e_Λ es precisamente $\mathrm{sgn}(\tau)$, esto concluye la prueba de la igualdad en (21).

iii) Si $\varphi \in \mathfrak{N}_\Lambda$ y $P \in \mathfrak{M}_\Lambda$, por *ii)* de esta proposición tenemos:

$$\begin{aligned}\Omega_\Lambda^*(\varphi)(P) &= \left(\frac{1}{|\mathscr{C}_\Lambda|}\sum_{\sigma\in\mathscr{H}_\Lambda}\chi_\Lambda(\sigma)(\sigma\varphi)\right)P = \frac{1}{|\mathscr{C}_\Lambda|}\sum_{\sigma\in\mathscr{H}_\Lambda}\chi_\Lambda(\sigma)\,\varphi\left(\sigma^{-1}P\right)\\ &= \varphi\left(\frac{1}{|\mathscr{C}_\Lambda|}\sum_{\sigma\in\mathscr{H}_\Lambda}\chi_\Lambda(\sigma)\,\sigma^{-1}P\right) = \varphi\left(\Omega_\Lambda(P)\right) = \varphi\left(\langle P, e_\Lambda\rangle e_\Lambda\right)\\ &= \varphi(e_\Lambda)\,f_\Lambda(P).\end{aligned}$$

□

2. La forma bilineal

En esta sección presentamos algunas propiedades de la forma lineal introducida en $\mathscr{A}$, que ayudan a extender los resultados en [2] para el grupo $\mathfrak{S}_n^m$.

Definición 2.1. *Si $\mathscr{J}$ es un subconjunto de $\mathbb{I}_n$, diremos que $\alpha \in \mathscr{M}$ está soportado en $\mathscr{J}$ si $\alpha_i = 0$ para cada $i \in \mathbb{I}_n - J$. También diremos que el monomio x^α está soportado en $\mathscr{J}$ si α lo está. Si $P \in \mathscr{A}$, diremos que P está soportado en $\mathscr{J}$ si cada monomio que aparece en P lo está.*

Si $\alpha \in \mathscr{M}$ le asociamos $\alpha^{\mathscr{J}} \in \mathscr{M}$ soportado en $\mathscr{J}$ dado por

$$\alpha_i^{\mathscr{J}} = \begin{cases}\alpha_i & \text{si } i \in \mathscr{J}\\ 0 & \text{si } i \notin \mathscr{J}.\end{cases}$$

Es claro que α está soportado en $\mathscr{J}$ si, y solo si, $\alpha^{\mathscr{J}} = \alpha$.

Si $\mathbb{I}_n = \bigcup_{l=0}^{h} \mathscr{J}_l$ es una partición de $\mathbb{I}_n$ y $\alpha \in \mathscr{M}$, α puede ser descompuesto en una forma única como

$$\alpha = \sum_{l=0}^{h} \alpha^{\mathscr{J}_l}, \tag{22}$$

de modo que, si $\alpha, \beta \in \mathscr{M}$,

$$\left\langle x^\alpha, x^\beta \right\rangle = \prod_{l=0}^{h}\left\langle x^{\alpha^{\mathscr{J}_l}}, x^{\beta^{\mathscr{J}_l}}\right\rangle.$$

Proposición 2.2. *Sean $P, Q \in \mathscr{A}$ y $\mathbb{I}_n = \bigcup_{l=0}^{h}\mathscr{J}_l$ una partición de $\mathbb{I}_n$. Si P y Q se factorizan como:*

$$P = \prod_{l=0}^{h} P^{\mathscr{J}_l} \qquad y \qquad Q = \prod_{l=0}^{h} Q^{\mathscr{J}_l},$$

donde $P^{\mathscr{J}_l}$ y $Q^{\mathscr{J}_l}$ están ambos soportados en $\mathscr{J}_l$ para cada l, entonces:

$$\langle P, Q\rangle = \prod_{l=0}^{h}\left\langle P^{\mathscr{J}_l}, Q^{\mathscr{J}_l}\right\rangle.$$

Demostración. La demostración puede establecerse haciendo inducción en h, lo que reduce a considerar solo el caso de una partición de dos términos que, para simplificar, ponemos $\mathbb{I}_n = \mathscr{I} \cup \mathscr{J}$. Escribiendo

$$P = \sum a_\alpha x^\alpha \qquad \text{y} \qquad Q = \sum b_\alpha x^\alpha$$

se tiene

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{\alpha,\beta} \delta_{\alpha,\beta} a_\alpha b_\beta,$$

donde δ es la función de Kronecker. Por otra parte, de la factorización

$$P = P^{\mathscr{I}} P^{\mathscr{J}} \qquad \text{y} \qquad Q = Q^{\mathscr{I}} Q^{\mathscr{J}}$$

y la descomposición única observada en (22), se tiene

$$a_\alpha = a_{\alpha^{\mathscr{I}}} a_{\alpha^{\mathscr{J}}}, \qquad b_\beta = b_{\beta^{\mathscr{I}}} b_{\beta^{\mathscr{J}}} \qquad \text{y} \qquad \delta_{\alpha,\beta} = \delta_{\alpha^{\mathscr{I}},\beta^{\mathscr{I}}} \delta_{\alpha^{\mathscr{J}},\beta^{\mathscr{J}}},$$

donde $a_{\alpha^{\mathscr{I}}} a_{\alpha^{\mathscr{J}}}$ son los respectivos coeficientes de $x^{\alpha^{\mathscr{I}}}$ y $x^{\alpha^{\mathscr{J}}}$ en $P^{\mathscr{I}}$ y $P^{\mathscr{J}}$; análogamente, $b_{\beta^{\mathscr{I}}} b_{\beta^{\mathscr{J}}}$ son los coeficientes de $x^{\beta^{\mathscr{I}}}$ y $x^{\beta^{\mathscr{J}}}$ en $Q^{\mathscr{I}}$ y $Q^{\mathscr{J}}$. Luego

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha,\beta} \delta_{\alpha,\beta} a_\alpha b_\beta &= \left(\sum_{\alpha^{\mathscr{I}},\beta^{\mathscr{I}}} \delta_{\alpha^{\mathscr{I}},\beta^{\mathscr{I}}} a_{\alpha^{\mathscr{I}}} b_{\beta^{\mathscr{I}}} \right) \left(\sum_{\delta_{\alpha^{\mathscr{J}},\beta^{\mathscr{J}}}} \delta_{\alpha^{\mathscr{J}},\beta^{\mathscr{J}}} a_{\alpha^{\mathscr{J}}} b_{\beta^{\mathscr{J}}} \right) \\
&= \left\langle P^{\mathscr{I}}, Q^{\mathscr{I}} \right\rangle \left\langle P^{\mathscr{J}}, Q^{\mathscr{J}} \right\rangle,
\end{aligned}$$

de donde resulta la proposición. □

Proposición 2.3. *Si $P, Q \in \mathscr{A}$ y k es un número natural, entonces*

$$\left\langle P\left(x_1^k, \ldots, x_n^k\right), Q\left(x_1^k, \ldots, x_n^k\right) \right\rangle = \langle P(x_1, \ldots, x_n), Q(x_1, \ldots, x_n) \rangle.$$

Demostración. Es una consecuencia de la identidad

$$\left\langle x^{k\alpha}, x^{k\beta} \right\rangle = \left\langle x^\alpha, x^\beta \right\rangle$$

para cada par $\alpha, \beta \in \mathscr{M}$. □

Dada una descomposición $\mathscr{P} = (\mathscr{P}_0, \ldots, \mathscr{P}_{m-1})$ de $\mathbb{I}_n$, es decir

$$\mathbb{I}_n = \bigcup_{l=0}^{m-1} \mathscr{P}_l$$

y los subconjuntos $\mathscr{P}_l$ son dos a dos disjuntos, llamamos $\mathscr{N}_{\mathscr{P}}$ al conjunto de todos los $\alpha \in \mathscr{M}$ tales que para cada l, $0 \leqslant l < m$, $\alpha_{|\mathscr{P}_l}$ es congruente con l módulo m.

Definición 2.4. *Si $P \in \mathscr{A}$, diremos que P tiene m-tipo $\mathscr{P}$ si*

$$P = \sum_{\alpha \in \mathscr{N}_p} \lambda_\alpha x^\alpha.$$

Proposición 2.5. *Sean P y $Q \in \mathscr{A}$, P con m-tipo $\mathscr{P}$, Q con m-tipo $\mathscr{Q}$. Si $\mathscr{P} \neq \mathscr{Q}$, entonces* $\langle P, Q \rangle = 0$.

Demostración. Si $\mathscr{P}$ y $\mathscr{Q}$ son descomposiciones diferentes de $\mathbb{I}_n$, es claro que $\mathscr{N}_{\mathscr{P}} \cap \mathscr{N}_{\mathscr{Q}} = \varnothing$ y consecuentemente $\langle P, Q \rangle = 0$. □

Lema 2.6. *Si Λ es una m-partición p-regular, la forma bilineal $\langle\, ,\, \rangle$ restringida a $\mathfrak{M}_\Lambda \times \mathfrak{M}_\Lambda$ es no nula.*

Demostración. Sea $\Lambda = \left(\mu^0, \ldots, \mu^{m-1}\right)$ la m-partición de n. Para cada i, $0 \leqslant i \leqslant m-1$, sea $q_i = \left|\mu^i\right|$ y ponemos

$$p_0 = 0 \qquad \text{y} \qquad p_i = \sum_{j<i} q_j.$$

Puesto que Λ es p-regular, cada μ^i es una partición p-regular. Por el Lema 2.2 *iv)* en [2], hay permutaciones σ_i en $\mathfrak{S}_{q_i}\left(\{p_i+1, \ldots, p_i+q_i\}\right)$ tales que para cada i

$$\left\langle e_{\alpha_{\mu^i}}, \sigma_i e_{\alpha_{\mu^i}} \right\rangle \neq 0.$$

Si ponemos $\tau = \sigma_0 \cdots \sigma_{m-1} \in \mathfrak{S}_n$, de (11) y de las Proposiciones 2.2 y 2.3 tenemos

$$\langle e_\Lambda, \tau e_\Lambda \rangle = \prod_{i=0}^{m-1} \left\langle e_{\alpha_{\mu^i}}, \sigma e_{\alpha_{\mu^i}} \right\rangle \neq 0.$$

□

3. Las representaciones modulares

Teorema 3.1. *Conservando las notaciones precedentes, se tiene:*

i) Si Λ es una m-partición p-regular de n, entonces $\mathfrak{N}_\Lambda \neq \{0\}$.
ii) Si $\mathfrak{N}_\Lambda \neq \{0\}$, $\mathfrak{N}_\Lambda$ es un $\mathfrak{S}_n^m$-módulo irreducible.
iii) Si Λ y Υ son m-particiones p-regulares de n, con $\Lambda \neq \Upsilon$, entonces $\mathfrak{N}_\Lambda \not\simeq \mathfrak{N}_\Upsilon$.
iv) Todo $\mathfrak{S}_n^m$-módulo simple es isomorfo a $\mathfrak{N}_\Lambda$ para alguna m-partición p-regular Λ de n.

Demostración. i) Es una consecuencia de 2.6.

ii) Sean $\Lambda = \left(\mu^0, \ldots, \mu^{m-1}\right)$ una m-partición de n, $\mathfrak{L}$ un $\mathfrak{S}_n^m$-submódulo de $\mathfrak{N}_\Lambda$ y $\varphi \in \mathfrak{L}$, φ no nulo. Dado que $\varphi \in \mathfrak{M}_\Lambda^*$, en virtud de la Observación 1.15, existe $P \in \mathfrak{M}_\Lambda$ tal que

$$\varphi(Q) = \langle P, Q \rangle \qquad \forall Q \in \mathfrak{M}_\Lambda.$$

Si $\varphi(\sigma e_\Lambda) = 0$ para todo $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, la funcional lineal φ debería ser cero, pero hemos asumido $\varphi \neq 0$. Así existe $\tau \in \mathfrak{S}_n$ tal que $\varphi(\tau e_\Lambda) \neq 0$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\varphi(e_\Lambda) \neq 0$, cambiando φ por $\tau^{-1}\varphi$ si fuera necesario. Ahora, si $Q \in \mathfrak{M}_\Lambda$, $\mathrm{gr}(Q) = \mathrm{gr}(e_\Lambda)$ y por la Proposición 1.21

$$\varphi(e_\Lambda) f_\Lambda = \Omega_\Lambda^*(\varphi) \in \mathfrak{L}.$$

Puesto que $\varphi(e_\Lambda) \neq 0$, sigue que $f_\Lambda \in \mathfrak{L}$, es decir $\mathfrak{L} = \mathfrak{N}_\Lambda$.

iii) Sean Λ y Υ m-particiones p-regulares de n tales que $\mathfrak{N}_\Lambda \simeq \mathfrak{N}_\Upsilon$. Probamos en el Lema 2.6 que existe $\tau \in \mathfrak{S}_n$ tal que

$$\langle e_\Lambda, \tau e_\Lambda \rangle \neq 0.$$

Si en la Proposición 1.21 *iii)* se hace jugar el rol de φ a $\tau^{-1} f_\Lambda$, se obtiene

$$\Omega_\Lambda^*\left(\tau^{-1} f_\Lambda\right) = \left(\left(\tau^{-1} f_\Lambda\right)(e_\Lambda)\right) f_\Lambda = \langle e_\Lambda, \tau e_\Lambda \rangle f_\Lambda \neq 0.$$

Como el operador Ω_Λ^* es no nulo en $\mathfrak{N}_\Lambda$ y es una combinación lineal de elementos en $\mathfrak{S}_n^m$, Ω_Λ^* debe ser no nulo en $\mathfrak{N}_\Upsilon$. Existe entonces $\pi \in \mathfrak{S}_n$ tal que

$$\Omega_\Lambda^*\left(\pi^{-1} f_\Upsilon\right) \neq 0,$$

pero esto es

$$0 \neq \Omega_\Lambda^*\left(\pi^{-1} f_\Upsilon\right) = \langle e_\Upsilon, \pi e_\Lambda \rangle f_\Upsilon.$$

Así

$$\langle e_\Upsilon, \pi e_\Lambda \rangle \neq 0,$$

es decir, e_Υ y πe_Λ tienen un monomio x^β común en sus respectivos desarrollos. De esto se sigue que α_Υ y α_Λ están en la misma $\mathfrak{S}_n$-órbita, y de la Observación 1.12 resulta $\alpha_\Upsilon = \alpha_\Lambda$, luego $\Upsilon = \Lambda$.

iv) Es suficiente probar que el número de m-particiones p-regulares coincide con el número de clases de conjugación p-regulares en $\mathfrak{S}_n^m$. Pero esto es consecuencia del hecho de que hay una biyección entre m-particiones y las clases de conjugación de $\mathfrak{S}_n^m$ que pone en correspondencia las m-particiones p-regulares con las clases de conjugación p-regulares de $\mathfrak{S}_n^m$, ver 3.7 en [16]. □

Por último, considerando el caso general donde p y m pudieran no ser coprimos, descomponemos $m = p^\alpha k$, donde $\alpha \in \mathbb{N}_0$ y p que no divide a k. Ahora asumimos que K contiene las raíces k-ésimas de la unidad. Consideremos $\tilde{\psi} : \mathscr{C}_m^n \to \mathscr{C}_k^n$ la proyección canónica dada por la descomposición

$$\mathscr{C}_m^n = \mathscr{C}_{p^\alpha}^n \oplus \mathscr{C}_k^n.$$

Este morfismo induce la proyección $\psi : \mathfrak{S}_n^m \longrightarrow \mathfrak{S}_n^k$ dada por

$$\pi(d, \tau) = (\pi(d), \tau) \qquad (d, \tau) \in \mathfrak{S}_n^m.$$

Por el teorema anterior, para cada a k-partición p-regular Λ de n hemos construido una representación irreducible de $\mathfrak{S}_n^k$

$$\rho_\Lambda : \mathfrak{S}_n^k \to \mathrm{Aut}_K(\mathfrak{N}_\Lambda),$$

y luego $\rho_\Lambda \circ \psi$ es una representación irreducible de $\mathfrak{S}_n^m$.

Conservando las notaciones precedentes, podemos enunciar a continuación el teorema que establece las representaciones modulares irreducibles de $\mathfrak{S}_n^m$ en el caso general.

Teorema 3.2. *Si K contiene las raíces k-ésimas de la unidad, se verifican las afirmaciones siguientes:*

i) Si Λ es una k-partición p-regular de n, entonces $\rho_\Lambda \circ \pi$ es una representación irreducible de $\mathfrak{S}_n^m$.
ii) Si Λ y Υ son k-particiones p-regulares de n y $\Lambda \neq \Upsilon$, entonces $\rho_\Lambda \circ \pi$ y $\rho_\Upsilon \circ \pi$ no son equivalentes.
iii) Toda representación irreducible de $\mathfrak{S}_n^m$ es equivalente a $\rho_\Lambda \circ \pi$ para alguna k-partición p-regular Λ de n.

Demostración. i) y *ii)* siguen del Teorema 3.1.

iii) Por *i)* y *ii)* tenemos tantas representaciones irreducibles no equivalentes de $\mathfrak{S}_n^m$ como k-particiones p-regulares de n. Por otra parte, se desprende de 3.7 en [16], que toda clase de conjugación p-regular de $\mathfrak{S}_n^m$ tiene un representante $\mathfrak{S}_n^k$, en consecuencia $\mathfrak{S}_n^m$ y $\mathfrak{S}_n^k$ tienen el mismo número de clases p-regulares. Se concluye que el número de clases p-regulares de $\mathfrak{S}_n^m$ coincide con el número de k-particiones p-regulares de n, y así, las representaciones $\rho_\Lambda \circ \pi$ agotan las representaciones modulares irreducibles de $\mathfrak{S}_n^m$. □

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos los comentarios y observaciones recibidos por parte del *referee*, los que han significado una valiosa contribución para mejorar la presentación de este artículo.

REFERENCIAS

[1] al-Aamily, E.; Morris, A. O.; Peel, M. H.: *The representations of the Weyl groups of type B_n*. Journal of Algebra 68 (1981), 298–305. MR 0608537.

[2] Aguado, J.; Araujo, J.: *Representations of the symmetric group $\mathfrak{S}_n$ on $K[x_1,\dots,x_n]$*. Revista de la Unión Matemática Argentina 41 (1998), no. 2, 39–50. MR 1700290.

[3] Aguado, J.; Araujo, J.: *A Gel'fand model for the symmetric group*. Communications in Algebra 29 (2001), 1841–1851. MR 1853129.

[4] Araujo, J.O.; Bigeón, J.J.: *A Gel'fand model for the symmetric generalized group*. Communications in Algebra 37 (2009), 1808–1830. MR 2526341.

[5] Araujo, J.O.; Bigeón, J.J.; Gamondi, R.M.: *Modular representations of Weyl groups of type B_n*. Communications in Algebra 38 (2010). MR 2674679.

[6] Bessenrodt, C.; Olsson, J. B.: *A note on Cartan matrices for symmetric groups*. Archiv der Mathematik 81 (2003), 497–504. MR 2029709.

[7] Can, H.: *Representations of the imprimitive complex reflection groups $G(m,1,n)$*. Communications in Algebra 26 (1998), 2371–2393. MR 1627917.

[8] Carter, R.: *Conjugacy classes in the Weyl group*. Compositio Mathematica 25 (1972), 1–59. MR 0318337.

[9] Cohen, A.M.: *Finite complex reflection groups*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 9 (1976), 379–436. MR 0422448.

[10] Curtis, C.; Reiner, I.: *Methods of representation theory with applications to finite groups and orders*. Vol. I, John Wiley & Sons, 1981. MR 0632548.

[11] Hughes, M.C.: *The representations of complex reflection groups. Thesis*, University of Wales, 1981.

[12] Farahat, H. K.; Peel, M. H.: *On the representation theory of the symmetric groups*. Journal of Algebra 67 (1980), 280–304. MR 0602064.

[13] Humphreys, J. F.: *Projective representations of the generalized symmetric groups*. Topics in algebra, Part 2 (Warsaw, 1988), 299–302. Banach Center Publ., 26, Part 2, PWN, Warsaw, 1990. MR 1171279.

[14] James, G.: *The representation theory of the symmetric groups*. Springer-Verlag, 1978. MR 0513828.

[15] Kane, R.: *Reflection groups and invariant theory*. Springer-Verlag, 2001. MR 1838580.

[16] Kerber, A.: *Representations of Permutation Groups I*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 240, Springer-Verlag, 1971. MR 0325752.

[17] Lusztig, G.: *A class of irreducible representations of a Weyl group*. Indagationes Mathematicae 41 (1979), 323–335. MR 0546372.

[18] Macdonald, I. G.: *Some irreducible representations of Weyl groups*. Bulletin of the London Mathematical Society 4 (1972), 148–150. MR 0320171.

[19] Morris, A.O.; Mwamba, P.: *Macdonald representations of complex reflection groups*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire, 52 (2004/07), Art. B52g, 17 pp. MR 2123061.

[20] Osima, M., *On the representations of the generalized symmetric group*, Math. J. Okayama Univ. 4 (1954), 39–54. MR 0067897.

[21] Read, E. W.: *The projective representations of the generalized symmetric groups*. J. Algebra 46 (1977), 102–133. MR 0457547.

[22] Saeed-UI-Islam, M.: *Irreducible projective representations of the generalized symmetric groups B_n^m*. Group theoretical methods in physics (Trieste, 1983), 70–72, Lecture Notes in Phys., 201, Springer, Berlin, 1984.

[23] Saeed-UI-Islam, M.: *Irreducible representations of the generalized symmetric group B_n^m*. Glasgow Math. J. 29 (1987), no. 1, 1–6. MR 0876144.

[24] Uno, K.; Yamada H.: *Elementary divisors of Cartan matrices for symmetric groups*. J. Math. Soc. Japan 58 (2006), 1031–1036. MR 2276180.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, FACULTAD DE CS. EXACTAS, UNCPBA, TANDIL, ARGENTINA

E-mail, J. O. Araujo: `araujo@exa.unicen.edu.ar`

E-mail, L. C. Maiarú: `lmaiaru@exa.unicen.edu.ar`

E-mail, M. Natale: `mnatale@exa.unicen.edu.ar`