ACTAS DEL XII CONGRESO
DR. ANTONIO A. R. MONTEIRO (2013)
2014, Páginas 3–21

DESIGUALDADES CON PESOS PARA EL OPERADOR DE HARDY Y APLICACIONES: CASOS LINEAL Y MULTILINEAL

ANA L. BERNARDIS

RESUMEN. En estas notas se presentan los teoremas clásicos de caracterización de los pares de pesos v y w para los cuales se tiene la acotación del operador de Hardy $Hf(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in (a,b)$ de $L^p(v)$ en $L^q(w)$ con $1 \leq p,q < \infty$. Como una aplicación de estos resultados se introducen los espacios de Sobolev con pesos. Se dedica una sección a la relación, vía reordenamientos, entre operadores clásicos del análisis y operadores de tipo Hardy, lo que permite obtener acotaciones de estos operadores a partir de acotaciones de los operadores de Hardy actuando sobre funciones decrecientes. Finalmente se introduce el operador de Hardy bilineal y se presentan resultados de acotación en espacios de Lebesgue con pesos como consecuencia de los resultados de acotación para el operador de Hardy clásico.

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de desigualdades en espacios de Lebesgue para el operador que hoy se conoce como operador de Hardy comenzó en 1915, cuando G. H. Hardy trató de encontrar una prueba más sencilla de la desigualdad de Hilbert. En su forma más básica la desigualdad de Hilbert dice lo siguiente: si $\sum_m a_m^2 < \infty$ y $\sum_n b_n^2 < \infty$, con $a_m, b_n \geq 0$, luego la serie doble

$$\sum_n \sum_m \frac{a_m\, b_n}{m+n}$$

converge. Más precisamente, se verifica la siguiente desigualdad

$$\sum_n \sum_m \frac{a_m\, b_n}{m+n} \leq \pi \left(\sum_m a_m^2\right)^{1/2} \left(\sum_n b_n^2\right)^{1/2},$$

donde π es la constante óptima; dicha constante óptima fue obtenida por I. Shur [28].

En [15], Hardy demostró el siguiente resultado: dados $a_n \geq 0$, la convergencia de cualquiera de las siguientes tres series

$$\sum_n \frac{a_n \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)}{n}, \qquad \sum_n \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 \qquad \text{y} \qquad \sum_n \sum_m \frac{a_n\, a_m}{n+m}$$

implica la de las demás. Hardy también probó en ese artículo el siguiente resultado: la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n^2$ con $a_n \geq 0$ implica la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\right)^2.$$

Este resultado puede considerarse como el precursor de la hoy conocida como desigualdad de Hardy discreta en el caso ℓ^2.

Finalmente, con las contribuciones de M. Riesz, E. Landau y Hardy alrededor de 1920 se prueba la siguiente desigualdad discreta: si $p > 1$ y $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de números no negativos, se verifica la desigualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p. \tag{1}$$

Este período termina cuando en 1920 Hardy formula [15], y en 1925 prueba [16], la siguiente versión continua de la desigualdad anterior: para $p > 1$ y cualquier función no negativa f tal que $f \in L^p((0,\infty))$, se verifica la desigualdad

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{\infty} f(x)^p\,dx. \tag{2}$$

La constante $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ en ambas desigualdades es óptima.

Las desigualdades (1) y (2) establecen que el operador de Hardy discreto h y el operador de Hardy continuo P definidos por

$$h(\{a_k\})(n) = \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right\} \qquad \text{y} \qquad P(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

envían ℓ^p en ℓ^p y L^p en L^p, respectivamente, y tienen norma $p' = p/(p-1)$. Ingham dio la siguiente prueba sencilla de la desigualdad (2): dado que $Pf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(s)\,ds = \int_0^1 f(tx)\,dt$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^{\infty}[Pf(x)]^p\,dx\right)^{1/p} &= \left\|\int_0^1 f(t\cdot)\,dt\right\|_p \\
&\leq \int_0^1 ||f(t\cdot)||_p\,dt = \int_0^1\left(\int_0^{\infty} f(tx)^p\,dx\right)^{1/p} dt \\
&= \int_0^1\left(\int_0^{\infty} f(s)^p\,\frac{ds}{t}\right)^{1/p} dt \\
&= \frac{p}{p-1}\left(\int_0^{\infty} f(s)^p\,ds\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Una exposición más detallada y con algunas demostraciones de la prehistoria de las desigualdades de Hardy se puede encontrar en [20].

En 1925 Hardy probó las siguientes desigualdades con pesos de tipo potencias, hoy conocidas también como desigualdades de Hardy: consideremos $1 < p < \infty$, $r > 0$ y $f \geq 0$ una función medible, no negativa y definida en $(0,\infty)$. Luego

$$\int_0^{\infty}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^p x^{-r-1}\,dx \leq C\int_0^{\infty}[x\,f(x)]^p x^{-r-1}\,dx,$$

con constante C independiente de f. Esto es, si $Hf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$,

$$\int_0^{\infty}[Hf(x)]^p x^{-r-1}\,dx \leq C\int_0^{\infty} f^p(x)x^{p-r-1}\,dx.$$

Equivalentemente, si $Pf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$,

$$\int_0^{\infty}[Pf(x)]^p x^{p-r-1}\,dx \leq C\int_0^{\infty} f^p(x)x^{p-r-1}\,dx,$$

donde $p-r-1<p-1$. El operador $\widetilde{H}f(x)=\int_x^\infty f(t)\,dt$ es el adjunto formal de H, es decir,

$$\int_0^\infty Hf(x)\,g(x)\,ds=\int_0^\infty f(x)\,\tilde{H}g(x)\,dx.$$

Como consecuencia de las desigualdades mencionadas para el operador H se puede probar que, para $1<p<\infty$, $r>0$ y $f\geq 0$ función medible, no negativa y definida en $(0,\infty)$,

$$\int_0^\infty [\widetilde{H}f(x)]^p x^{r-1}\,dx\leq C\int_0^\infty f^p(x)x^{p+r-1}\,dx.$$

Resultó natural entonces plantearse el problema de determinar las funciones no negativas v y w tales que los operadores $Hf(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ y $\widetilde{H}f(x)=\int_x^\infty f(t)\,dt$ resulten acotados de $L^p(v)$ en $L^q(w)$, donde $1\leq p,q<\infty$, y a este problema le dedicaremos la siguiente sección.

2. Desigualdades de Hardy con pesos

En 1969, Talenti [30] determinó las condiciones que tenían que verificar las funciones v y w para que los operadores H y $\widetilde{H}$ estuviesen acotados de $L^p(v)$ en $L^p(w)$. En 1972, Muckenhoupt [25] simplificó la demostración de Talenti y generalizó los resultados obtenidos por este a espacios $L^p(d\mu)$ y $L^p(d\nu)$. En 1978, Bradley [11] caracterizó la acotación de H y $\widetilde{H}$ de $L^p(v)$ en $L^p(w)$ cuando $1\leq p\leq q<\infty$ y en 1985 Maz'ja [24] dio la caracterización en el caso $1\leq q<p<\infty$.

El resto de esta sección está dedicado a enunciar y demostrar los teoremas de Bradley y Maz'ja para el operador H, dado que los resultados para su adjunto $\widetilde{H}$ se obtienen de forma similar. Trabajaremos en un intervalo (a,b) con $-\infty\leq a<b\leq+\infty$, el operdor de Hardy H se define entonces como

$$Hf(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad x\in(a,b).$$

Utilizaremos también los siguientes conjuntos:

$$W(a,b)=\{\text{funciones definidas en }(a,b),\ \text{medibles},\ \text{positivas y finitas en casi todo punto}\}$$

y

$$M^+(a,b)=\{\text{funciones definidas en }(a,b),\ \text{medibles y no negativas}\}.$$

Para enunciar el Teorema de Bradley usaremos la siguiente notación:

$$A_{p,q}=\sup_{a<x<b}\left(\int_x^b w(t)\,dt\right)^{1/q}\left(\int_a^x [v(t)]^{1-p'}\,dt\right)^{1/p'}, \qquad \text{si } p>1$$

y

$$A_{1,q}=\sup_{a<x<b}\left(\int_x^b w(x)\,dx\right)^{1/q}\operatorname*{ess\,sup}_{a<t<x}\,[v(t)]^{-1}.$$

Teorema 1 ([11])**.** *Sean $1\leq p\leq q<\infty$ y $v,w\in W(a,b)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Existe $C>0$ tal que*

$$\left(\int_a^b [Hf(x)]^q w(x)\,dx\right)^{1/q}\leq C\left(\int_a^b [f(x)]^p v(x)\,dx\right)^{1/p},$$

para toda $f\in M^+(a,b)$.

(ii) $A_{p,q}<\infty$.

Además, si C es la constante óptima en (i), luego $C\approx A_{p,q}$.

Para enunciar el Teorema de Maz'ja usaremos la siguiente notación:

$$B_{p,q}=\left\{\int_a^b\left(\int_x^b w(t)\,dt\right)^{r/p}\left(\int_a^x[v(t)]^{1-p'}\,dt\right)^{r/p'}w(x)\,dx\right\}^{1/r},$$

donde $1\leq q<p<\infty$ y $\frac{1}{r}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$. Integrando por partes en $B_{p,q}$ es posible obtener la siguiente expresión equivalente

$$\widetilde{B}_{p,q}=\left\{\int_a^b\left(\int_x^b w(t)\,dt\right)^{r/q}\left(\int_a^x[v(t)]^{1-p'}\,dt\right)^{r/q'}[v(x)]^{1-p'}\,dx\right\}^{1/r}.$$

En efecto, dado que $\frac{r}{p}=\frac{r}{q}-1$ y $\frac{r}{p'}=\frac{r}{q'}+1$,

$$\begin{aligned}B_{p,q}&=\left\{\int_a^b\left(\int_x^b w(t)\,dt\right)^{r/p}\left(\int_a^x[v(t)]^{1-p'}\,dt\right)^{r/p'}w(x)\,dx\right\}^{1/r}\\&=\left\{\int_a^b\left(\int_x^b w(t)\,dt\right)^{r/q-1}w(x)\left(\int_a^x[v(t)]^{1-p'}\,dt\right)^{r/q'+1}dx\right\}^{1/r}\\&\approx\left\{\int_a^b\left(\int_x^b w(t)\,dt\right)^{r/q}\left(\int_a^x[v(t)]^{1-p'}\,dt\right)^{r/q'}[v(x)]^{1-p'}\,dx\right\}^{1/r}\\&=\widetilde{B}_{p,q}.\end{aligned}$$

Teorema 2 ([24]). *Sean $1\leq q<p<\infty$, $\frac{1}{r}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$ y $v,w\in W(a,b)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Existe $C>0$ tal que*

$$\left(\int_a^b[Hf(x)]^q w(x)\,dx\right)^{1/q}\leq C\left(\int_a^b[f(x)]^p v(x)\,dx\right)^{1/p},$$

para toda $f\in M^+(a,b)$.

(ii) $B_{p,q}<\infty$.

Además, si C es la constante óptima en (i), luego $C\approx B_{p,q}$.

Para probar las implicaciones $(ii)\Rightarrow(i)$ en ambos teoremas se utilizará el siguiente argumento de partición de E. Sawyer, el cual permitirá dar una versión unificada de ambas demostraciones.

Dada una función f positiva e integrable en (a,b), se define la sucesión $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ de la siguiente manera: consideramos $x_0=b$ y una vez definido el término x_k se toma x_{k+1} de forma tal que $\int_a^{x_{k+1}}f=\int_{x_{k+1}}^{x_k}f$. Con este proceso de selección se consigue una sucesión $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ estrictamente decreciente tal que $(a,b)=\bigcup_{k=0}^{\infty}[x_{k+1},x_k)$, $\lim_{k\to\infty}x_k=a$ y

$$\int_a^{x_k}f=4\int_{x_{k+2}}^{x_{k+1}}f.$$

Demostración del Teorema 1. $(ii) \Rightarrow (i)$. Dado que basta considerar funciones positivas e integrables en (a,b), aplicando el argumento de arriba a la función f y al intervalo (a,b) tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_a^b [Hf(x)]^q w(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k-1}} \left(\int_a^x f \right)^q w(x)\,dx \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k-1}} \left(\int_a^{x_{k-1}} f \right)^q w(x)\,dx \\
&= 4^q \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k-1}} \left(\int_{x_{k+1}}^{x_k} f \right)^q w(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $p > 1$, aplicando la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_a^b [Hf(x)]^q w(x)\,dx &\leq 4^q \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{x_{k+1}}^{x_k} f v^{\frac{1}{p}} v^{-\frac{1}{p}} \right)^q \int_{x_k}^{x_{k-1}} w(x)\,dx \\
&\leq 4^q \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{x_{k+1}}^{x_k} f^p v \right)^{q/p} \left(\int_{x_{k+1}}^{x_k} v^{-\frac{p'}{p}} \right)^{q/p'} \int_{x_k}^{x_{k-1}} w \\
&\leq 4^q \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{x_{k+1}}^{x_k} f^p v \right)^{q/p} \left(\int_a^{x_k} v^{-\frac{p'}{p}} \right)^{q/p'} \int_{x_k}^{b} w \\
&\leq 4^q (A_{p,q})^q \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{x_{k+1}}^{x_k} f^p v \right)^{q/p} \\
&\leq 4^q (A_{p,q})^q \left(\int_a^b f^p v \right)^{q/p}.
\end{aligned}$$

Si $p = 1$,

$$\begin{aligned}
\int_a^b [Hf(x)]^q w(x)\,dx &\leq 4^q \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{x_{k+1}}^{x_k} f v v^{-1} \right)^q \int_{x_k}^{x_{k-1}} w(x)\,dx \\
&\leq 4^q \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{x_{k+1}}^{x_k} f v \right)^q \left(\operatorname*{ess\,sup}_{x_{k+1}<t<x_k} v^{-1} \right)^q \int_{x_k}^{x_{k-1}} w \\
&\leq 4^q (A_{1,q})^q \left(\int_a^b f v \right)^q.
\end{aligned}$$

$(i) \Rightarrow (ii)$. Primero supondremos que $p > 1$. Consideremos $y \in (a,b)$, luego

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left[\int_a^x f(t)\,dt \right]^q w(x)\,dx &\geq \int_y^b \left[\int_a^x f(t)\,dt \right]^q w(x)\,dx \\
&\geq \int_y^b \left[\int_a^y f(t)\,dt \right]^q w(x)\,dx \\
&= \left(\int_a^y f(t)\,dt \right)^q \int_y^b w(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de la desigualdad en (i) tenemos que

$$\left(\int_a^y f(t)\,dt \right) \left(\int_y^b w(x)\,dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_a^b [f(x)]^p v(x)\,dx \right)^{1/p},$$

para toda $f \in M^+(a,b)$. Tomando $f = v^{1-p'}\chi_{(a,y)}$

$$\left(\int_a^y v^{1-p'}(t)\,dt\right)\left(\int_y^b w(x)\,dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_a^y v^{1-p'}(x)\,dx\right)^{1/p},$$

lo que implica (ii) si $\int_a^y v^{1-p'}(x)\,dx < \infty$ para todo $y \in (a,b)$. Sea ahora v cualquier función en $W(a,b)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in (a,b)$ definimos

$$v_n(x) = v(x) + \frac{1}{n}\left(1 + (x^2)^{\frac{1}{p'-1}}\right).$$

Notar que $v_n \in W(a,b)$ y $\int_a^y v_n^{1-p'} < \infty$, para todo $y \in (a,b)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\int_a^y v_n^{1-p'}(t)\,dt &\leq \int_a^b \left[v(t) + \frac{1}{n}\left(1 + (t^2)^{\frac{1}{p'-1}}\right)\right]^{1-p'} dt \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{n}\left(1 + (t^2)^{\frac{1}{p'-1}}\right)\right]^{1-p'} dt \\
&\leq \int_{|t|>1} \frac{n^{p'-1}}{t^2}\,dt + \int_{|t|\leq 1} n^{p'-1}\,dt < \infty.
\end{aligned}$$

Luego, dado que $0 \leq v_n^{1-p'}(x) \leq v_{n+1}^{1-p'}(x)$ y $\lim_{n\to\infty} v_n^{1-p'}(x) = v^{1-p'}(x)$, aplicando los resultados anteriores a v_n y utilizando el teorema de la convergencia monótona tenemos (ii), con $A_{p,q} \leq C$.

Ahora probaremos la implicación $(i) \Rightarrow (ii)$ en el caso $1 = p \leq q$. Para $x \in (a,b)$ definimos

$$S(x) = \operatorname*{ess\,sup}_{a<t<x} [v(t)]^{-1} > 0.$$

Dado $y \in (a,b)$, sea $\{a_n\}$ una sucesión estrictamente creciente de números positivos tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = S(y).$$

Para cada n consideremos el conjunto

$$\widetilde{M}_n = \{x \in (a,y) : v^{-1}(x) > a_n\}.$$

Notar que $|\widetilde{M}_n| > 0$. Consideremos ahora $M_n \subset \widetilde{M}_n$ tal que $0 < |M_n| < \infty$ y definamos para $x \in (a,b)$

$$f_n(x) = \chi_{M_n}(x).$$

Como en el caso $p > 1$, tenemos que

$$\left(\int_a^y f(t)\,dt\right)\left(\int_y^b w(x)\,dx\right)^{1/q} \leq C\int_a^b f(x)v(x)\,dx,$$

para todo $y \in (a,b)$ y reemplazando f por $f_n = \chi_{M_n}$,

$$\left(\int_y^b w(x)\,dx\right)^{1/q} |M_n| \leq C\int_{M_n} v(x)\,dx \leq C|M_n|a_n^{-1}.$$

Luego

$$a_n\left(\int_y^b w(x)\,dx\right)^{1/q} \leq C.$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$ tenemos la condición $A_{1,q}$. □

Los detalles de la demostración del Teorema 1 fueron extraídos de la Memoria de Licenciatura de María Isabel Aguilar Cañestro, titulada *Desigualdades de Hardy* y dirigida por Pedro Ortega Salvador [1]. En la demostración del Teorema 2 se utilizarán los argumentos de [7].

Demostración del Teorema 2. Como en la prueba del Teorema 1,

$$\begin{aligned}
\int_a^b [Hf(x)]^q w(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k-1}} \left(\int_a^x f\right)^q w(x)\,dx \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k-1}} \left(\int_a^{x_{k-1}} f\right)^q w(x)\,dx \\
&= 4^q \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k-1}} \left(\int_{x_{k+1}}^{x_k} f\right)^q w(x)\,dx \\
&= 4^q \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{x_{k+1}}^{x_k} f v^{\frac{1}{p}} v^{-\frac{1}{p}}\right)^q \int_{x_k}^{x_{k-1}} w \\
&\le 4^q \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{x_{k+1}}^{x_k} f^p v\right)^{q/p} \left(\int_{x_{k+1}}^{x_k} v^{-\frac{p'}{p}}\right)^{q/p'} \int_{x_k}^{x_{k-1}} w.
\end{aligned}$$

Dado que $1/r = 1/q - 1/p$, aplicando la desigualdad Hölder discreta con exponentes p/q y r/q tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_a^b [Hf(x)]^q w(x)\,dx &\le 4^q \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_{k+1}}^{x_k} f^p v\right)^{q/p} \\
&\quad \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{x_{k+1}}^{x_k} v^{-\frac{p'}{p}}\right)^{r/p'} \left(\int_{x_k}^{x_{k-1}} w\right)^{r/q}\right)^{q/r} \\
&\le 4^q \left(\int_a^b f^p v\right)^{q/p} b_{p,q},
\end{aligned}$$

donde

$$b_{p,q} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{x_{k+1}}^{x_k} v^{-\frac{p'}{p}}\right)^{r/p'} \left(\int_{x_k}^{x_{k-1}} w\right)^{r/q}\right)^{q/r}.$$

Dado que $\frac{r}{q} = \frac{r}{p} + 1$ tenemos que

$$\left(\int_{x_k}^{x_{k-1}} w\right)^{r/q} \approx \int_{x_k}^{x_{k-1}} \left(\int_x^{x_{k-1}} w\right)^{r/p} w(x)\,dx,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
b_{p,q} &\approx \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k-1}} \left(\int_{x_{k+1}}^{x_k} v^{-\frac{p'}{p}}\right)^{r/p'} \left(\int_x^{x_{k-1}} w\right)^{r/p} w(x)\,dx\right)^{q/r} \\
&\le \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_k}^{x_{k-1}} \left(\int_a^x v^{-\frac{p'}{p}}\right)^{r/p'} \left(\int_x^b w\right)^{r/p} w(x)\,dx\right)^{q/r} \\
&\le \left(\int_a^b \left(\int_a^x v^{-\frac{p'}{p}}\right)^{r/p'} \left(\int_x^b w\right)^{r/p} w(x)\,dx\right)^{q/r} = B_{p,q}.
\end{aligned}$$

De esta forma hemos probado la implicación deseada.

Para probar la implicación $(i) \Rightarrow (ii)$, consideremos w_0 y v_0 funciones no negativas e integrables tales que $w_0 \leq w$ y $v_0 \leq v^{1-p'}$ y sea

$$f(t) = \left(\int_t^b w_0\right)^{\frac{r}{pq}} \left(\int_a^t v_0\right)^{\frac{r}{p'q}-1} v_0(t).$$

Luego, para $x \in (a,b)$

$$\begin{aligned}\int_a^x f(t)\,dt &\geq \left(\int_x^b w_0\right)^{\frac{r}{pq}} \int_a^x \left(\int_a^t v_0\right)^{\frac{r}{p'q}-1} v_0(t)\,dt \\ &= \frac{p'q}{r} \left(\int_x^b w_0\right)^{\frac{r}{pq}} \left(\int_a^x v_0\right)^{\frac{r}{p'q}}.\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad en (i) tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\frac{p'q}{r}\right)^q \int_a^b \left(\int_x^b w_0\right)^{r/p} &\left(\int_a^x v_0\right)^{r/p'} w_0(x)\,dx \\ &\leq \int_a^b \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)^q w(x)\,dx \\ &\leq C^q \left(\int_a^b f^p(x)v(x)\,dx\right)^{\frac{q}{p}} \\ &= C^q \left(\int_a^b \left(\int_x^b w_0\right)^{r/q} \left(\int_a^x v_0\right)^{r/q'} v_0^p(x)v(x)\,dx\right)^{\frac{q}{p}} \\ &\leq C^q \left(\int_a^b \left(\int_x^b w_0\right)^{r/q} \left(\int_a^x v_0\right)^{r/q'} v_0(x)\,dx\right)^{\frac{q}{p}} \\ &= C^q \left(\frac{p'}{q}\right)^{q/p} \left(\int_a^b \left(\int_x^b w_0\right)^{r/p} \left(\int_a^x v_0\right)^{r/p'} w_0(x)\,dx\right)^{\frac{q}{p}},\end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos integrado por partes. Dado que w_0 y v_0 son funciones integrables, de lo anterior tenemos que

$$\left\{\int_a^b \left(\int_x^b w_0\right)^{r/p} \left(\int_a^x v_0\right)^{r/p'} w_0(x)\,dx\right\}^{1/r} \leq C(r/p'q)(p'/q)^{1/p}.$$

Finalmente, aproximando w y $v^{1-p'}$ por sucesiones crecientes de funciones integrables obtenemos (ii). $\square$

Los Teoremas 1 y 2 conforman lo que podría llamarse la teoría clásica de las desigualdades de Hardy. Esta teoría ha evolucionado en varias direcciones. A continuación citamos varias generalizaciones del operador de Hardy junto con las referencias donde se encuentran los resultados de caracterización de los pares de pesos v y w para los cuales estos operadores están acotados de $L^p(v)$ en $L^q(w)$. Como primer ejemplo consideremos el operador de Riemman–Liouville

$$T_\alpha f(x) = \int_a^x (x-y)^\alpha f(y)dy, \qquad x \in (a,b), \quad \alpha > 0.$$

Las caracterizaciones para este operador se pueden encontrar en los artículos de Martín-Reyes y Sawyer [23] y de Stepanov [29]. Como una generalización de los operadores T_α podemos citar los operadores de Hardy–Volterra

$$Kf(x) = \int_a^x k(x,t)f(t)dt, \qquad x \in (a,b),$$

donde $k(x,y) \geq 0$ es una función defida en $\{(x,t) : a < t < x < b\}$. En 1991, Oinarov [26] y Bloom y Kerman [9] consideran este tipo de operadores con $k(x,y)$ creciente en x, decreciente en y y tal que

$$D^{-1}[k(x,z) + k(z,t)] \leq k(x,t) \leq D[k(x,z) + k(z,t)],$$

para $a < t < z < x < b$, donde la constante $D > 1$ es independiente de x, y y z. Otra generalización la constituye el operador de Hardy–Steklov definido por

$$Tf(x) = \int_{s(x)}^{h(x)} f,$$

donde s y h son funciones no decrecientes y continuas en (a,b) tales que $s(x) \leq h(x)$ para todo $x \in (a,b)$. En [18] y [8] se caracterizan las desigualdades con pesos para estos operadores. Por último citamos el operador de Hardy n dimensional

$$Tf(x) = \int_{B(0,|x|)} f(y)\,dy.$$

Desigualdades en espacios de Lebesgue con pesos se pueden encontrar en el artículo de Drábek, Heinig y Kufner [13].

3. Aplicación a los espacios de Sobolev con pesos

Con $AC(a,b)$ denotaremos a la familia de las funciones u definidas en (a,b) tales que u es absolutamente continua en todo intervalo $[c,d] \subset (a,b)$ y con AC_L al conjunto de las funciones $u \in AC(a,b)$ tales que $\lim_{x\to a^+} u(x) = 0$.

Veremos que la acotación del operador de Hardy H de $L^p(v)$ en $L^q(w)$ es equivalente a que exista $C > 0$ tal que $\left(\int_a^b |u|^q w\right)^{1/q} \leq C \left(\int_a^b |u'|^p v\right)^{1/p}$ para toda $u \in AC(a,b)$. Concretamente probaremos el siguiente lema.

Lema 1. *Sean $1 < p, q < \infty$ y $v, w \in W(a,b)$. Si suponemos que $\int_a^x v^{1-p'}(t)\,dt < \infty$ para cada $x \in (a,b)$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Existe $C > 0$ tal que*

$$\left(\int_a^b \left[\int_a^x f(t)\,dt\right]^q w(x)\,dx\right)^{1/q} \leq C \left(\int_a^b [f(x)]^p v(x)\,dx\right)^{1/p},$$

para toda $f \in M^+(a,b)$.

(ii) *Existe $C_L > 0$ tal que*

$$\left(\int_a^b |u(x)|^q w(x)\,dx\right)^{1/q} \leq C_L \left(\int_a^b |u'(x)|^p v(x)\,dx\right)^{1/p},$$

para toda $u \in AC_L(a,b)$.

Demostración. Supongamos que se cumple (i). Sea $u \in AC_L(a,b)$, $J = \int_a^b |u'(x)|^p v(x)\,dx < \infty$ y $x \in (a,b)$. Luego

$$\begin{aligned}\int_a^x |u'(t)|\,dt &= \int_a^x |u'(t)| v^{\frac{1}{p}}(t) v^{-\frac{1}{p}}(t)\,dt \\ &\leq J^{1/p} \left(\int_a^x v^{1-p'}(t)\,dt\right)^{1/p'} < \infty.\end{aligned}$$

Dado que $u \in AC_L(a,b)$, $u(x) = \int_c^x u'(t)\,dt + u(c)$ para todo $c \in (a,b)$ y $\lim_{c\to a^+} u(c) = 0$. Tomando límite cuando $c \to a^+$ en la igualdad de arriba y usando el teorema de la convergencia dominada tenemos que

$$u(x) = \int_a^x u'(t)\,dt.$$

Aplicando (i) con $f = |u'|$ tenemos

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b |u(x)|^q w(x)\,dx\right)^{1/q} &\leq \left(\int_a^b \left(\int_a^x |u'|\right)^q w(x)\,dx\right)^{1/q} \\ &\leq C\left(\int_a^b |u'(x)|^p v(x)\,dx\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Supongamos ahora que se verifica (ii). Sea $f \in M^+(a,b)$ y $J = \int_a^b f^p v < \infty$. Luego

$$\int_a^x f \leq J^{1/p} \left(\int_a^x v^{1-p'}(t)\,dt\right)^{1/p'} < \infty,$$

para todo $x \in (a,b)$. Sea $u(x) = \int_a^x f(t)\,dt = Hf(x)$. Es claro que $u \in AC_L(a,b)$, y teniendo en cuenta que $u'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$, obtenemos (i). $\square$

Los detalles de la prueba del lema anterior fueron extraídos de [1].

En [21], Kufner y Opic definen la clase de pesos $B_p(a,b)$ mediante la siguiente condición:

$$w \in B_p(a,b) \qquad \text{si } w^{-1/(p-1)} \in L^1_{\text{loc}}(a,b).$$

Luego prueban que si $v \in B_p(a,b)$ y $p > 1$, el espacio de Sobolev con pesos

$$W^{1,p}(w,v) = \{f : (a,b) \to \mathbb{R} : f \in L^1_{\text{loc}} \cap L^p(w) \text{ y } f' \in L^p(v)\}$$

es un espacio de Banach con la norma

$$||f||_{W^{1,p}(w,v)} = ||f||_{L^p(w)} + ||f'||_{L^p(v)}.$$

Definamos

$$W^{1,p}_L(w,v) = \{u : (a,b) \to \mathbb{R} : u \in AC_L(a,b), u \in L^p(w) \text{ y } u' \in L^p(v)\}.$$

Si se verifica la condición en los pesos que garantice la desigualdad

$$\left(\int_a^b |u(x)|^p w(x)\,dx\right)^{1/p} \leq C\left(\int_a^b |u'(x)|^p v(x)\,dx\right)^{1/p},$$

para toda $u \in AC_L(a,b)$, esto es, si

$$\sup_{a<x<b} \left(\int_x^b w(t)\,dt\right)^{1/p} \left(\int_a^x [v(t)]^{1-p'}\,dt\right)^{1/p'} < \infty,$$

luego

$$||u||_{W^{1,p}_L(w,v)} = ||u||_{L^p(w)} + ||u'||_{L^p(v)} \approx ||u'||_{L^p(v)}.$$

Considerando $W_L^{1,p}(w,v)$ con la norma $||u'||_{L^p(v)}$ tenemos que

$$\|u\|_{L^q(w)} \leq C\|u\|_{W_L^{1,p}(v)},$$

es decir, la continuidad de la identidad de $W_L^{1,p}(v)$ a $L^q(w)$.

4. Aplicación a la acotación de operadores

Con λ_f denotaremos a la función distribución de la función medible $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, es decir,

$$\lambda_f(s) = |\{x : |f(x)| > s\}|, \qquad s \geq 0,$$

donde $|E|$ es la medida de Lebesgue de E, y con f^* denotaremos a la reordenada decreciente de f,

$$f^*(t) = \text{ínf}\{s : \lambda_f(s) \leq t\}, \qquad t \geq 0.$$

Muchos operadores clásicos del análisis están relacionados, vía reordenamientos, con operadores de tipo Hardy y, a veces, también con su adjunto. El ejemplo clásico es el operador maximal de Hardy–Littlewood M definido como

$$Mf(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy,$$

donde con Q denotamos a los cubos de $\mathbb{R}^n$ con lados paralelos a los ejes coordenados. Un resultado clásico (ver por ejemplo [6]) establece que si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, existen constantes C y C', dependientes solo de n, tales que

$$C(Mf)^*(t) \leq P(f^*)(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds \leq C'(Mf)^*(t), \qquad t > 0. \tag{3}$$

Notar que si $p > 1$, de (3) y de (2) tenemos que

$$\begin{aligned}
||Mf||_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} [Mf(x)]^p\,dx\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^\infty [(Mf)^*(t)]^p\,dt\right)^{1/p} \\
&\leq C^{-1}\left(\int_0^\infty [P(f^*)]^p\,dt\right)^{1/p} \\
&\leq C^{-1}\frac{p}{p-1}\left(\int_0^\infty [f^*]^p\,dt\right)^{1/p} \\
&= C^{-1}\frac{p}{p-1}||f||_p.
\end{aligned}$$

Veremos que este argumento de pasar por la acotación del operador de Hardy para acotar un determinado operador se puede aplicar a otros espacios, como por ejemplo a los espacios de Lorentz clásicos. Sea w una función medible no negativa definida en $(0,\infty)$ y sea $1 \leq q < \infty$; definimos los espacios de Lorentz clásicos $\Lambda^q(w)$ como

$$\Lambda^q(w) = \left\{ f : ||f||_{\Lambda^q(w)} = \left(\int_0^\infty [f^*(t)]^q w(t)\,dt\right)^{1/q} < \infty \right\}.$$

Notemos que cuando $w=1$, $\Lambda^q(w)=L^q$, y cuando $w=q/px^{q/p-1}$, $\Lambda^q(w)=L^{p,q}$. Aplicando (3) tenemos que

$$\begin{aligned}||Mf||_{\Lambda^q(w)} &= \left(\int_0^\infty [(Mf)^*(t)]^q w(t)\,dt\right)^{1/q}\\ &\approx \left(\int_0^\infty [P(f^*)(t)]^q w(t)\,dt\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Luego, para estudiar del operador M sobre los espacios $\Lambda^q(w)$ bastará con estudiar el operador de Hardy P sobre las funciones decrecientes de $L^q(w)$. Recordemos que el Teorema 1 muestra que la desigualdad

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\infty [Pg(x)]^q w(x)\,dx\right)^{1/q} &= \left(\int_0^\infty [Hg(x)]^q \frac{w(x)}{x^q}\,dx\right)^{1/q}\\ &\leq C\left(\int_0^\infty [g(x)]^q w(x)\,dx\right)^{1/q}, \qquad (4)\end{aligned}$$

se verifica para toda función $g\geq 0$ definida en $(0,\infty)$ si y solo si

$$\sup_{x>0}\left(\int_x^\infty \frac{w(t)}{t^q}\,dt\right)^{1/q}\left(\int_0^x w(t)^{1-q'}\,dt\right)^{1/q'}<\infty. \qquad (5)$$

En 1990, M. A. Ariño y B. Muckenhoupt [4] dan un ejemplo de función w tal que se verifica la desigualdad (4) cuando nos restringimos a funciones $g\geq 0$ decrecientes y sin embargo w no verifica la condición (5); prueban, además, que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Existe $C>0$ tal que

$$\left(\int_0^\infty [Pg(x)]^q w\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty g^q w\right)^{\frac{1}{q}},$$

para toda $g\geq 0$ definida en $(0,\infty)$, medible y decreciente.

(ii) Existe $C>0$ tal que

$$||Mf||_{\Lambda^q(w)}\leq C||f||_{\Lambda^q(w)},$$

para toda función medible f.

(iii) $w\in B_q$, es decir, existe $C>0$ tal que para todo $x>0$,

$$\int_x^\infty \frac{w(t)}{t^q}\,dt \leq \frac{C}{x^q}\int_0^x w(t)\,dt.$$

E. Sawyer [27] dio una caracterización para la acotación de M de $\Lambda^p(v)$ en $\Lambda^q(w)$ con $1\leq p,q<\infty$. La implicación $(i)\Rightarrow(ii)$ se obtiene fácilmente de (3) y de la definición del espacio $\Lambda^q(w)$. Para probar $(ii)\Rightarrow(i)$ se utiliza nuevamente (3) y el siguiente resultado: sea g una función decreciente y no negativa definida en $(0,\infty)$, sea $f(x)=g(A|x|^n):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, donde A es el volumen de la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$; luego $f^*=g$ en casi todo punto. En efecto, con estos resultados tenemos que

$$\left(\int_0^\infty [Pg(x)]^q w\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^\infty [P(f^*)(x)]^q w\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\lesssim \left(\int_0^\infty [(Mf)^*(x)]^q w\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\lesssim \left(\int_0^\infty [f^*(x)]^q w\right)^{\frac{1}{q}} = ||g||_{L^p(w)}.$$

Ver [4] para la prueba completa del resultado.

Otro operador clásico del análisis es la Transformada de Hilbert definida por

$$\mathscr{H} f(x) = v.p. \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t}\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t}\,dt.$$

Bennett y Rudnick [5] (ver también [6]) probaron que si

$$S(f^*)(1) = \int_0^1 f^*(s)\,ds + \int_1^\infty f^*(s)\frac{ds}{s} < \infty,$$

luego para cualquier $t > 0$,

$$[\mathscr{H} f]^*(t) \lesssim \left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds + \int_t^\infty f^*(s)\frac{ds}{s}\right) \lesssim [\mathscr{H}(f^*)]^*(t).$$

El operador S definido por

$$S(g)(t) = \left(\frac{1}{t}\int_0^t g(s)\,ds + \int_t^\infty g(s)\frac{ds}{s}\right)$$

es un caso particular del operador de Calderón. Notar que este operador es la suma de los operadores H y $\widetilde{H}$.

Otro operador importante por su aplicación a las ecuaciones diferenciales es el operador potencial de Riesz o integral fraccionaria, definido por

$$I_\gamma f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\gamma}}\,dy, \qquad 0 < \gamma < n.$$

También en [5] se prueba que

$$(I_\gamma f)^*(t) \lesssim \left(t^{\gamma/n-1}\int_0^t f^*(s)\,ds + \int_t^\infty s^{\gamma/n-1} f^*(s)\,ds\right) \lesssim (I_\gamma \tilde{f})^*(t),$$

donde $\tilde{f}(x) = f^*(A|x|^n)$. El operador

$$S_a g(x) = t^{a-1}\int_0^t f^*(s)\,ds + \int_t^\infty s^{a-1} f^*(s)\,ds$$

es otro caso particular del operador de Calderón. Caracterizaciones de los pesos para los cuales los operadores S_a están acotados en espacios de Lebesgue con pesos se encuentran en [27].

Asociado al potencial de Riesz tenemos el operador maximal fraccionario M_γ, $0 < \gamma < n$, definido por

$$M_\gamma f(x) = \sup_{x\in Q} |Q|^{\frac{\gamma}{n}-1}\int_Q |f(y)|\,dy.$$

Cuando $\gamma = 0$ el operador M_γ es el operador maximal de Hardy–Littlewood M. Cianchi, Kerman, Opic y Pick [12] probaron que

$$[M_\gamma f]^*(t) \lesssim \sup_{t\le s<\infty} s^{\frac{\gamma}{n}} P(f^*)(s) = T_\gamma(f^*)(t), \qquad t>0.$$

También probaron que para cualquier función $g \geq 0$ decreciente y definida en $(0,\infty)$,

$$[M_\gamma \tilde{f}]^*(t) \gtrsim \sup_{t\le s<\infty} s^{\frac{\gamma}{n}} P(g)(t) = T_\gamma(g),$$

donde $\tilde{f}(x) = g(A|x|^n)$. Caracterizaciones de los pesos para la acotación en espacios de Lebesgue con pesos del operador T_γ actuando sobre las funciones decrecientes se pueden encontrar en [14].

El caso del operador maximal de Hardy–Littlewood se puede generalizar a operadores maximales de tipo convolución definidos, para una función φ no negativa y medible con soporte en $[-1,1]^n$, como

$$M_\varphi f(x) = \sup_{r>0}(\varphi_r * |f|)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^n}\int |f(x-y)|\varphi\left(\frac{y}{r}\right) dy.$$

En [19], Jurkat y Troutman probaron que

$$[M_\varphi f]^*(t) \le \frac{C}{t}\int_0^t \varphi^*(s/t) f^*(s)\, ds = C\int_0^1 \varphi^*(s) f^*(st)\, ds.$$

Acotaciones de $L^p(v)$ a $L^q(w)$ de operadores del tipo

$$Tf(x) = \int_0^1 a(t) f(xt)\, dt, \qquad x>0,$$

para funciones f decrecientes y donde $a \geq 0$ es una función medible, fueron estudiadas por varios autores, ver por ejemplo [3], [10] y [22].

Un caso particular de los operadores maximales de tipo convolución son los operadores maximales de Cesàro. En una dimensión los operadores de Cesàro M_α resultan ser los operadores M_φ con

$$\varphi(x) = c(1-|x|)^{\alpha-1}\chi_{(-1,1)}(x), \qquad \alpha>0,$$

es decir,

$$M_\alpha f(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{r^\alpha}\int_{x-r}^{x+r} |f(y)|(r-|x-y|)^{\alpha-1}\, dy.$$

Como en este caso $\varphi^*(t) \lesssim t^{\alpha-1}\chi_{(0,1)}(x)$,

$$[M_\alpha f]^*(t) \le \frac{C}{t}\int_0^t (s/t)^{\alpha-1} f^*(s)\, ds = \frac{C}{t^\alpha}\int_0^t f^*(s) s^{\alpha-1}\, ds = P_\alpha(f^*)(t).$$

5. Aplicación al estudio del operador de Hardy bilineal

En [2] M. Aguilar Cañestro, P. Ortega Salvador y C. Ramírez Torreblanca estudiaron el siguiente problema: dado el operador de Hardy bilineal

$$\mathscr{H}(f,g)(x) = Hf(x)Hg(x) = \left(\int_a^x f(t)\, dt\right)\left(\int_a^x g(t) dt\right),$$

caracterizar las funciones w, w_1, w_2 de $W(a,b)$ tales que la desigualdad

$$\left(\int_a^b [\mathscr{H}(f,g)(x)]^q w(x) dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\int_a^b f^{p_1} w_1\right)^{\frac{1}{p_1}}\left(\int_a^b g^{p_2} w_2\right)^{\frac{1}{p_2}} \tag{6}$$

se verifica para todo par de funciones no negativas (f,g) con constante positiva C independiente de f y g, donde $q, p_1, p_2 > 1$.

En [2] también se menciona la siguiente aplicación: si se define el espacio

$$W_L^{1,p}(w) = \{u : (a,b) \to \mathbb{R} : u \in AC_L(a,b) \text{ y } u' \in L^p(w)\}$$

con la norma $||u||_{W_L^{1,p}(w)} = ||u'||_{L^p(w)}$ y en la desigualdad (6) se toma $u(x) = Hf(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ y $v(x) = Hg(x) = \int_a^x g(t)\,dt$, se tiene que

$$\|uv\|_{L^q(w)} \leq C\|u\|_{W_L^{1,p_1}(w_1)}\|v\|_{W_L^{1,p_2}(w_2)},$$

es decir, el problema de caracterización para el operador de Hardy bilineal equivale a caracterizar los pesos w, w_1, w_2 para los cuales el producto es continuo de $W_L^{1,p_1}(w_1) \times W_L^{1,p_2}(w_2)$ en $L^q(w)$.

Las condiciones que debe cumplir la terna de pesos (w, w_1, w_2) depende de la relación entre los parámetros q, p_1 y p_2. En estas notas solo consideraremos el caso $p_1 \leq q$ puesto que se puede ver como una aplicación de los resultados de acotación del operador de Hardy clásico H.

En lo que sigue utilizaremos la siguiente notación: con $\widetilde{H}$ denotaremos al adjunto del operador H, $\widetilde{H}f(x) = \int_x^b f(t)\,dt$, con σ_i, $i = 1,2$, denotaremos a $w_i^{1-p_i'}$, y con r_2 al parámetro que verifica la siguiente igualdad $\dfrac{1}{r_2} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p_2}$. Con esta notación definimos las siguientes expresiones que utilizaremos en el resultado que probaremos:

$$\mathscr{A} = \sup_{a<x<b} \left(\tilde{H}w(x)\right)^{\frac{1}{q}} (H\sigma_1(x))^{\frac{1}{p_1'}} (H\sigma_2(x))^{\frac{1}{p_2'}}$$

y

$$\mathscr{B} = \sup_{a<x<b} (H\sigma_1(x))^{\frac{1}{p_1'}} \left(\int_x^b \left(\tilde{H}w(y)\right)^{\frac{r_2}{q}} (H\sigma_2(y))^{\frac{r_2}{q'}} \sigma_2(y)dy\right)^{\frac{1}{r_2}}.$$

Teorema 3 ([2])**.** *Sean $w, w_1, w_2 \in W(a,b)$ y supongamos $p_1 \leq q$. Son equivalentes:*

(i) *Se verifica* (6) *para todo par de funciones no negativas (f,g).*

(ii) (a) *$\mathscr{A} < \infty$, si $p_2 \leq q$.*

(b) *$\mathscr{A}, \mathscr{B} < \infty$, si $q < p_2$.*

La prueba de la implicación $(ii) \Rightarrow (i)$ que daremos es algo diferente de la que se presenta en [2] dado que se utilizan de forma más directa los resultados conocidos del operador H. La demostración de $(i) \Rightarrow (ii)$ es la misma que se da en [2]. Ver también [2] para el caso $p_1 > q$.

Demostración del Teorema 3. $(ii) \Rightarrow (i)$. Notar que la desigualdad (6) es equivalente a

$$\left(\int_a^b [Hf(x)]^q w_g(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_a^b f^{p_1} w_1\right)^{\frac{1}{p_1}},$$

donde

$$w_g(x) = (H(g/||g||_{p_2,w_2})(x))^q w(x).$$

Dado que en los casos (a) y (b) $p_1 \le q$, la implicación estará probada si probamos que $\mathscr{A} < \infty$ (o $\mathscr{A}, \mathscr{B} < \infty$ en el caso (b)) implica que $A_{p_1,q} < \infty$ cuando en la expresión $A_{p_1,q}$ reemplazamos w por w_g y v por w_1, es decir,

$$\sup_{a<x<b} A_{p_1,q}(x) = \sup_{a<x<b} \left(\int_x^b w_g \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^x \sigma_1 \right)^{\frac{1}{p_1'}} < \infty.$$

Notar que

$$\begin{aligned} A_{p_1,q}(x) &= \left(\int_x^b \left(\int_a^t g(s)/||g||_{p_2,w_2}\, ds \right)^q w(t)\, dt \right)^{\frac{1}{q}} (H\sigma_1(x))^{\frac{1}{p_1'}} \\ &\le \left(\int_x^b \left(\int_a^x g(s)/||g||_{p_2,w_2}\, ds \right)^q w(t)\, dt \right)^{\frac{1}{q}} (H\sigma_1(x))^{\frac{1}{p_1'}} \\ &\quad + \left(\int_x^b \left(\int_x^t g(s)/||g||_{p_2,w_2}\, ds \right)^q w(t)\, dt \right)^{\frac{1}{q}} (H\sigma_1(x))^{\frac{1}{p_1'}} \\ &= I(x) + II(x). \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned} I(x) &= \left(\int_x^b w(t)\, dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^x g(s)/||g||_{p_2,w_2}\, ds \right) (H\sigma_1(x))^{\frac{1}{p_1'}} \\ &= ||g||_{p_2,w_2}^{-1} \left(\int_x^b w(t)\, dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^x g(s) w_2^{1/p_2} w_2^{-1/p_2}\, ds \right) (H\sigma_1(x))^{\frac{1}{p_1'}} \\ &\le ||g||_{p_2,w_2}^{-1} \left(\int_x^b w(t)\, dt \right)^{\frac{1}{q}} ||g||_{p_2,w_2} (H\sigma_2(x))^{\frac{1}{p_2'}} (H\sigma_1(x))^{\frac{1}{p_1'}} \\ &\le \left(\widetilde{H} w(x) \right)^{\frac{1}{q}} (H\sigma_2(x))^{\frac{1}{p_2'}} (H\sigma_1(x))^{\frac{1}{p_1'}} \le \mathscr{A} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} II(x) &= \left(\int_x^b \left(\int_x^t g(s)/||g||_{p_2,w_2}\, ds \right)^q w(t)\, dt \right)^{\frac{1}{q}} (H\sigma_1(x))^{\frac{1}{p_1'}} \\ &= \left(\int_x^b \left(\int_x^t g(s)/||g||_{p_2,w_2}\, ds \right)^q w_x(t)\, dt \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

donde

$$w_x(t) = (H\sigma_1(x))^{\frac{q}{p_1'}} w(t).$$

Por lo tanto $II(x) \le C$, para todo $x \in (a,b)$, si y solo si (w_2, w_x) satisface la condición necesaria y suficiente para que el operador $\int_x^t f$ esté acotado de $L^{p_2}((x,b), w_2)$ en $L^q((x,b), w_x)$, para todo $x \in (a,b)$. Si estamos en el caso (a), es decir $p_2 \le q$, dicha condición es la condición $A_{p_2,q}$ en el intervalo (x,b), esto es,

$$\sup_{x<t<b} A_{p_2,q}(t) = \sup_{x<t<b} \left(\int_t^b w_x \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_x^t \sigma_2 \right)^{\frac{1}{p_2'}} < \infty.$$

Sea $t \in (x,b)$, dado que $w_x(t) = (H\sigma_1(x))^{\frac{q}{p_1'}} w(t)$, luego

$$\begin{aligned} A_{p_2,q}(t) &= \left(\int_t^b w_x(s)\,ds\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_x^t \sigma_2(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p_2'}} \\ &= \left(\int_t^b w(s)\,ds\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^x \sigma_1(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p_1'}} \left(\int_x^t \sigma_2(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p_2'}} \\ &\leq \left(\int_t^b w(s)\,ds\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^t \sigma_1(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p_1'}} \left(\int_a^t \sigma_2(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p_2'}} \leq \mathscr{A}. \end{aligned}$$

Si estamos en el caso (b), esto es $q < p_2$, la condición a verificar es la condición $B_{p_2,q}$ en el intervalo (x,b), esto es, tenemos que verificar que $B_{p_2,q} < \infty$ con $w = w_x$ y $v = w_2$ o bien que

$$\widetilde{B}_{p_2,q} = \left\{\int_x^b \left(\tilde{H}w_x(t)\,dt\right)^{\frac{r_2}{q}} \left(\int_x^t \sigma_2(s)\,ds\right)^{\frac{r_2}{q'}} \sigma_2(t)\,dt\right\}^{\frac{1}{r_2}} < \infty.$$

Reemplazando w_x por su definición, claramente se tiene que $\widetilde{B}_{p_2,q} \leq \mathscr{B}$. De esta forma completamos la prueba de la implicación deseada.

Para probar que $(i) \Rightarrow (ii)$ fijamos $y \in (a,b)$ y aplicamos la desigualdad (6) con $f = \sigma_1\chi_{(a,y)}$ y $g = \sigma_2\chi_{(a,y)}$. Luego

$$\begin{aligned} \left(\int_y^b w\right)^{1/q} \left(\int_a^y \sigma_1\right)\left(\int_a^y \sigma_2\right) &= \left(\int_y^b \left(\int_a^y \sigma_1\right)^q \left(\int_a^y \sigma_2\right)^q w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_a^b \left(\int_a^x \sigma_1\chi_{(a,y)}\right)^q \left(\int_a^x \sigma_2\chi_{(a,y)}\right)^q w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C\left(\int_a^y \sigma_1\right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\int_a^y \sigma_2\right)^{\frac{1}{p_2}}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene que $\mathscr{A}(y) \leq C$ para cualquier $y \in (a,b)$.

Veamos ahora que lo mismo ocurre con la condición $\mathscr{B}$ en el caso (b). Claramente probar la desigualdad (6) también equivale a probar que

$$\left(\int_a^b (Hg)(x))^q w_f(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_a^b g^{p_2} w_2\right)^{\frac{1}{p_2}}, \tag{7}$$

donde

$$w_f(x) = (H(f/||f||_{p_1,w_1})(x))^q w(x).$$

Por otro lado, sabemos por el Teorema 2 que como $p_2 > q$, (7) es equivalente a la siguiente condición:

$$\widetilde{B}_{p_2,q} = \left\{\int_a^b \left(\tilde{H}w_f(x)\right)^{\frac{r_2}{q}} (H\sigma_2(x))^{\frac{r_2}{q'}} \sigma_2(x)dx\right\}^{\frac{1}{r_2}} < \infty,$$

donde $\frac{1}{r_2} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p_2}$. Notemos que, si $a < x < t < b$,

$$w_f(t) \geq (H(f/||f||_{p_1,w_1})(x))w(t).$$

Acotando w_f por debajo en $\widetilde{B}_{p_2,q}$ tenemos que (6) implica que

$$\left(\int_a^b (Hf(x))^{r_2} u(t)\,dt\right)^{1/r_2} \leq C||f||_{p_1,w_1},$$

donde

$$u(x) = \left(\tilde{H}_2 w(x)\right)^{r_2/q} \left(H\sigma_2(x)\right)^{r_2/q'} \sigma_2(x).$$

La desigualdad de arriba nos dice que el operador H está acotado de $L^{p_1}(w_1)$ en $L^{r_2}(u)$. Como $p_1 < r_2$, planteando la condición del tipo A_{p_1,r_2} en el Teorema 1 para el par de pesos (w_1, u) obtenemos la condición $\mathscr{B}$. □

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi agradecimiento a María Isabel Aguilar Cañestro y a su director Pedro Ortega Salvador por haberme facilitado la Memoria de Licenciatura que tomé como base para armar este curso.

REFERENCIAS

[1] M. I. Aguilar Cañestro, *Desigualdades de Hardy*, Memoria para optar al grado de Licenciado en Ciencias sección Matemática. Universidad de Málaga (2003).

[2] M. I. Aguilar Cañestro, P. Ortega Salvador, and C. Ramírez Torreblanca, *Weighted bilinear Hardy inequalities*, J. Math. Anal. Appl. **387** (2012), 320–334. MR 2845753.

[3] K.F. Andersen, *Weighted generalized Hardy inequalities for nonincreasing functions*, Canad. J. Math. **43**, (1991), no. 6, 1121–1135. MR 1145581.

[4] M. A. Ariño and B. Muckenhoupt, *Maximal functions on classical Lorentz spaces and Hardy's inequality with weights for nonincreasing functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **320** (1990), 727–735. MR 0989570.

[5] C. Bennet and K. Rudnick, *On Lorentz–Zygmund spaces*, Dissert. Math. **175** (1980), 1–72. MR 0576995.

[6] C. Bennet and R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press. Inc., Orlando, 1988. MR 0928802.

[7] A. L. Bernardis, F. J. Martín-Reyes and P. Ortega, *A* new proof of the characterization of the weighted Hardy inequality, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **135** (2005), 941–945. MR 2187218.

[8] A. L. Bernardis, F. J. Martín-Reyes and P. Ortega Salvador, *Weighted inequalities for Hardy–Steklov operators*, Canad. J. Math. **59** (2007), no. 2, 276–295. MR 2310617.

[9] S. Bloom and R. Kerman, *Weighted norm inequalities for operators of Hardy type*, Proc. Amer. Math. Soc. **113** (1991), no. 1, 135–141. MR 1059623.

[10] M. Sh. Braverman, *On a class of operators*, J. London Math. Soc. (2) **47** (1993), 119–128. MR 1200982.

[11] J. Bradley, *Hardy inequalities with mixed norms*, Canad. Math. Bull. **21** (1978), no. 4, 405–408. MR 0523580.

[12] A. Cianchi, R. Kerman, B. Opic, and L. Pick, *A sharp rearrangement inequality for the fractional maximal operator*, Studia Math. **138** (2000), 277–284. MR 1758860.

[13] P. Drábek, H. P. Heinig and A. Kufner, *Higher-dimensional Hardy inequality*, General inequalities, 7 (Oberwolfach, 1995), 3–16, Internat. Ser. Numer. Math., 123, Birkhauser, Basel, 1997. MR 1457264.

[14] A. Gogatishvili, B. Opic and L. Pick, *Weighted inequalities for Hardy-type operators involving suprema*, Collect. Math. **57** (2006), no. 3, 227–255. MR 2264321.

[15] G. H. Hardy, *Note on a theorem of Hilbert*, Math. Z. **6** (1920), no. 3-4, 314–317. MR 1544414.

[16] G. H. Hardy, *Notes on some points in the integral calculus, LX. An inequality between integrals*, Messenger Math. **54** (1925), 150–156.

[17] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, *Inequalities*, 2nd ed. Cambridge Univ. Press, Cambridge 1952 (first ed. 1934). MR 0046395.

[18] H. P. Heinig and G. Sinnamon, *Mapping properties of integral averaging operators*, Studia Math. **129** (1998), 157–177. MR 1608162.

[19] W. Jourkat and J. Troutman, *Maximal inequalities related to generalized a.e.*, Trans. Amer. Math. Soc. **252** (1979), 49–64. MR 0534110.

[20] A. Kufner, L. Maligranda, and L. Persson, *The prehistory of the Hardy inequality*, Amer. Math. Monthly **113** (2006), no. 8, 715–732. MR 2256532.

[21] A. Kufner and B. Opic, *How to define reasonably weighted Sobolev spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. **25** (1984), no. 3, 537–554. MR 0775568.

[22] S. Lai, *Weighted norm inequalities for general operators on monotone functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **340** (1993), no. 2, 811–836. MR 1132877.

[23] F. J. Martín-Reyes and E. Sawyer, *Weighted inequalities for Riemann–Liouville fractional integrals of order one and greater*, Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989), no. 3, 727–733. MR 0965246.

[24] V. G. Maz'ja, *Sobolev Spaces*, Springer-Verlag, 1985. MR 0817985.

[25] B. Muckenhoupt, *Hardy's inequality with weights*, Studia Math. **44** (1972), 31–38. MR 0311856.

[26] R. Oinarov, *Weighted inequalities for a class of integral operators*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **319** (1991), no. 5, 1076–1078; English transl. in Soviet Math. Dokl. **44** (1992), no. 1, 291–293. MR 1152890.

[27] E. T. Sawyer, *Boundedness of classical operators in classical Lorentz spaces*, Studia Math. **96** (1990), 145–158. MR 1052631.

[28] I. Schur, *Bemerkungen zur Theorie der Beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen*, J. Math. **140** (1911), 1–28.

[29] V. D. Stepanov, *Two-weighted estimates for Riemann-Liouville integrals*, Math. SSSR Izv. **36** (1991), no. 3, 669–681. MR 1072699.

[30] G. Talenti, *Osservazioni sopra una classe di disuguaglianze*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **39** (1969), 171–185. MR 0280661.

IMAL - FIQ, CONICET - UNL, GÜEMES 3450, 3000 SANTA FE, ARGENTINA
E-mail: bernard@santafe-conicet.gov.ar