

ESTUDIO DE LOS CICLOS PERIÓDICOS EN DIVERSOS PROBLEMAS DERIVADOS DEL PÉNDULO

ANDREA BEL, WALTER REARTES, AND ANA TORRESI

RESUMEN. En este trabajo se estudian ecuaciones derivadas de la del péndulo simple utilizando principalmente el método de análisis homotópico (HAM), y se complementa el estudio con el método de balance de armónicos y la comparación con resultados numéricos. Se desarrollan técnicas para encontrar todas las soluciones periódicas en el péndulo simple por medio del HAM y luego se generalizan y aplican estas técnicas a dos problemas más generales: un péndulo con realimentación dependiente de la posición y la velocidad, y uno con retardo. En el primer caso se utilizan técnicas de balance de armónicos para lograr un análisis local más detallado. En ambos casos se encuentran bifurcaciones de Hopf y se determinan las amplitudes de los ciclos periódicos emergentes y su estabilidad.

1. INTRODUCCIÓN

El péndulo simple consiste en una masa puntual, sujeta a un vínculo que permite el movimiento en un plano vertical, a una distancia fija de un punto y sometida a la atracción de la gravedad. En ausencia de rozamiento es un sistema conservativo.

Un sistema tan simple sin embargo presenta características dinámicas que lo vuelven muy interesante. Por un lado es un sistema no lineal que puede integrarse explícitamente, pero solamente después de recurrir a la teoría de funciones elípticas de Jacobi [4]. Por otro lado su descripción como sistema dinámico nos muestra un espacio de fases con la estructura de variedad diferenciable con topología no trivial, es un cilindro. Estas características lo vuelven un ejemplo obligado en casi cualquier libro de mecánica, mecánica geométrica o sistemas dinámicos.

El péndulo simple presenta dos equilibrios: el equilibrio trivial alrededor del cual se desarrolla un centro no lineal, y un equilibrio inestable que corresponde al péndulo invertido. Las órbitas en un entorno del equilibrio trivial son ciclos homotópicos con la identidad en el grupo fundamental del cilindro; estos movimientos suelen denominarse oscilaciones. Este sistema presenta dos órbitas homóclinas que unen el equilibrio inestable con sí mismo. Separadas por estas últimas se encuentran las llamadas rotaciones, que son órbitas no homotópicas con la identidad. En la Figura 1 se puede ver un retrato de fase completo.

Este trabajo no solo trata sobre el péndulo, sino también sobre el método de análisis homotópico [12, 13, 14] (HAM, por sus siglas en inglés), método que hemos implementado en un trabajo anterior para encontrar soluciones periódicas en un problema con retardo [2].

Los sistemas considerados aquí son especialmente interesantes desde el punto de vista de su resolución con este método. Esto es así por dos razones: por un lado al ser el espacio de fases una variedad diferenciable se presta para ejemplificar cómo hacer un cambio de coordenadas de tal manera que las órbitas que representan rotaciones puedan ser íntegramente calculadas en el interior de una única carta, como ocurre habitualmente con las oscilaciones

Palabras clave. Método de análisis homotópico, balance armónico, ecuaciones diferenciales con retardo, bifurcación de Hopf, péndulo simple.

usando las coordenadas usuales. Por otro lado, la presencia de la función $\text{sen}(\theta)$ en la ecuación da lugar a la aparición de un problema algebraico referido a las condiciones de arranque del método. Hemos resuelto este problema recurriendo al desarrollo de Jacobi–Anger.

Además, consideramos dos variaciones de la ecuación del péndulo simple, a saber, hemos agregado términos que podrían representar una realimentación dependiente de la velocidad y la posición, y también hemos considerado una realimentación con retardo. En el primer caso no ha sido nuestra intención tratar un sistema en particular, sino mostrar cómo el HAM es una herramienta formidable para hallar ciclos periódicos en el análisis de bifurcación. Por lo tanto agregamos todos los términos de más bajo orden (hasta orden tres) que podrían aparecer en este sistema. Esto convierte al sistema en disipativo, lo que puede provocar la aparición de ciclos límite. Hacemos notar que los términos con que hemos modificado la ecuación original también deben ser periódicos en la coordenada angular. Además, utilizamos otra metodología que combina métodos en el dominio frecuencia [15] y la teoría de singularidades [8, 9] que permite, considerando un parámetro distinguido, determinar condiciones generales que deben cumplir los parámetros auxiliares para la aparición de bifurcaciones de Hopf degeneradas. Para una cierta combinación de los parámetros determinamos regiones en el espacio de parámetros auxiliares donde es posible encontrar multiplicidad de órbitas periódicas. Esta clasificación nos permite determinar la configuración dinámica del sistema y así poder elegir condiciones apropiadas en el espacio de parámetros (control de bifurcaciones [5]); luego para valores de los parámetros especialmente elegidos, hemos comparado los resultados con los obtenidos utilizando el programa MATCONT [6].

Como segunda variación del péndulo hemos considerado una realimentación periódica muy simple, pero utilizando la posición retardada, y mostrando la presencia de bifurcaciones de Hopf. Aquí se ha analizado el comportamiento del sistema en función del retardo y de la ganancia de la realimentación. Los resultados se comparan con los obtenidos mediante el paquete DDE-BIFTOOL [7].

2. EL PÉNDULO SIMPLE

Consideremos la ecuación de un péndulo simple. Si usamos como coordenada el ángulo que forma el hilo con la vertical y reescalamos el tiempo adecuadamente, resulta:

$$\ddot{\theta} + \text{sen } \theta = 0. \quad (1)$$

Debido a que la energía

$$e = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + 1 - \cos \theta \quad (2)$$

es constante, la ecuación puede resolverse fácilmente por integración directa (ver por ejemplo [10], [4] o [1] para su versión cuántica). Hay tres tipos de soluciones, dependiendo del valor v_0 de la velocidad para $\theta = 0$:

1. Si $|v_0| < 2$ el movimiento es oscilatorio. Aquí el ángulo tiene la siguiente expresión en función del tiempo:

$$\theta(t) = 2 \arcsin(\lambda \text{sn}(t + \phi; \lambda)), \quad (3)$$

siendo $\lambda = v_0/2$ y $\phi = K(\lambda)$. K es la integral elíptica completa de primera especie

$$K(\lambda) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \text{sen}^2 \varphi}} = \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(1 - v^2)(1 - \lambda^2 v^2)}}, \quad 0 < \lambda < 1,$$

y $\text{sn}(u; \lambda)$ es una función elíptica de Jacobi. El período de este movimiento es

$$T = 4K\left(\frac{v_0}{2}\right). \quad (4)$$

2. Si $|v_0| > 2$ el movimiento es una rotación. La expresión correspondiente del ángulo es

$$\theta(t) = 2 \arcsin(\operatorname{sn}(t\lambda; 1/\lambda)), \tag{5}$$

y el período resulta

$$T = \frac{4}{v_0} K\left(\frac{2}{v_0}\right). \tag{6}$$

3. Si $|v_0| = 2$ se tiene una órbita homóclina que une el equilibrio inestable con sí mismo. En este caso el movimiento no es periódico (puede considerarse como el límite de un ciclo cuando el período tiende a infinito). La expresión es la siguiente:

$$\theta(t) = 4 \arctan(\tanh(t/2)).$$

En la Figura 1 se muestran varias soluciones oscilatorias y rotatorias, junto con las órbitas homóclinas del equilibrio inestable $(\pi, 0)$. A la izquierda vemos la representación clásica de las distintas soluciones en el espacio $(\theta, \dot{\theta})$ y a la derecha las representamos sobre el cilindro. Se observa claramente que, considerando esta variedad, las únicas soluciones no periódicas son las órbitas homóclinas, y que estas separan los dos tipos de soluciones restantes en el espacio de fases.

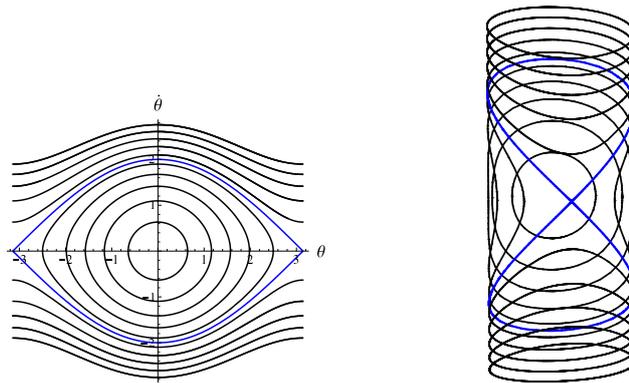


FIGURA 1. Soluciones del péndulo simple en el espacio de fases.

3. MÉTODO DE ANÁLISIS HOMOTÓPICO

Sea un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales

$$N[x, g_1, g_2, \dots, g_m] = 0, \tag{7}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $g_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, son constantes relacionadas con el problema (no representan parámetros). El sistema tiene condiciones iniciales dadas, que llamaremos CI.

Para hallar una solución periódica de este sistema consideremos la familia de operadores $\mathcal{H}_q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, que depende del parámetro de deformación q :

$$\mathcal{H}_q[\phi] = (1 - q)\mathcal{L}[\phi - x_0] - qh\mathcal{N}_q[\phi],$$

donde $h \neq 0$, $x_0(t)$ funciona como semilla inicial y verifica las condiciones iniciales CI, \mathcal{L} es un operador lineal relacionado con el sistema (7), y $\mathcal{N}_q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el operador no lineal

$$\mathcal{N}_q[\phi] = N[\phi(t, q), \gamma_1(q), \gamma_2(q), \dots, \gamma_m(q)].$$

En este trabajo se usan los siguientes operadores lineales:

$$\mathcal{L}_1[\psi] = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \psi, \quad (8a)$$

$$\mathcal{L}_2[\psi_1, \psi_2] = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & 1 \\ -1 & \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \psi_2 \\ -\psi_1 + \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \end{pmatrix}. \quad (8b)$$

El procedimiento se basa en la búsqueda de funciones $\phi, \gamma_1, \dots, \gamma_m$ analíticas en q tales que: $\mathcal{H}_q[\phi] = 0$ si $q \in [0, 1]$, y $\phi(t, q)$ verifique las condiciones iniciales CI para $q \in [0, 1]$. Si estas funciones existen y tomamos $q = 0$ se tiene $\mathcal{H}_0[\phi] = \mathcal{L}[\phi(t, 0) - x_0(t)] = 0$. Para los operadores definidos en (8) resulta

$$\begin{aligned} \phi(t, 0) - x_0(t) &= c_1 \cos t + c_2 \sin t, \\ \phi(t, 0) - x_0(t) &= c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

respectivamente, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Luego, ya que ϕ y x_0 verifican las mismas condiciones CI, se obtiene $\phi(t, 0) = x_0(t)$ para ambos operadores. Por otro lado, si $q = 1$, $\mathcal{H}_1[\phi] = -h\mathcal{N}_1[\phi(t, 1)] = 0$, y así $\phi(t, 1), \gamma_1(1), \dots, \gamma_m(1)$ serán solución del sistema (7). De esta manera, cuando el parámetro q varía de 0 a 1, la función $\phi(t, q)$ varía de la semilla inicial $x_0(t)$ a la solución buscada.

Para hallar las funciones $\phi, \gamma_1, \dots, \gamma_m$ analíticas en $q \in [0, 1]$ consideremos sus desarrollos en serie

$$\phi(t, q) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k(t)q^k, \quad \gamma_1(q) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_{1k}q^k, \quad \dots, \quad \gamma_m(q) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_{mk}q^k.$$

Reemplazando estos desarrollos en $\mathcal{H}_q[\phi] = 0$, y tomando $q = 0$ luego de derivar k veces respecto de q se obtiene

$$\mathcal{L}[x_k(t) - (1 - \delta_{1k})x_{k-1}(t)] = \frac{h}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1} \mathcal{N}_q[\phi]}{\partial q^{k-1}} \Big|_{q=0}, \quad (9)$$

para $k \geq 1$. De la misma manera, usando el desarrollo en serie de ϕ y dado que $\phi(t, 0) = x_0(t)$ verifica las condiciones iniciales del sistema, resulta $x_k(0) = x'_k(0) = 0$ para $k \geq 1$. Los términos x_k en el desarrollo de $\phi(t, 1)$ se calculan resolviendo la ecuación (9) con las condiciones indicadas. Como la solución que se desea encontrar es periódica, cada término debe serlo. Entonces, dependiendo del operador lineal utilizado, el lado derecho de (9) deberá verificar ciertas condiciones para asegurar que al resolver el término k -ésimo no contenga funciones no periódicas (del estilo $t \cos t, t \sin t$). Estas condiciones permitirán calcular los términos $g_{ik}, i = 1, \dots, m$. Para $k = 1$ se obtiene un sistema de ecuaciones no lineal con incógnitas g_{10}, \dots, g_{m0} , mientras que para $k \geq 2$ el sistema será lineal. Para cada k se resuelve el sistema correspondiente y se calcula x_k ; este procedimiento se repite hasta el orden deseado.

Solo resta determinar un valor adecuado para h . Las aproximaciones de las constantes $g_i, i = 1, \dots, m$, serán polinomios en h , y lo mismo sucederá con $x(t)$ y sus derivadas para t fijo. Como se muestra en el libro de Liao [12] la observación del comportamiento de estos polinomios permite seleccionar un valor adecuado para h . En los valores de h para los cuales la serie converge, dichos polinomios tenderán en el límite, cuando el orden tiende a infinito, a un valor independiente de h . Así, graficando los polinomios podremos tener una idea aproximada del lugar en que se encuentran estas regiones y seleccionar un valor apropiado para h . En la siguiente sección se muestra un ejemplo de estos polinomios.

3.1. HAM: Movimiento oscilatorio. Consideremos la ecuación del péndulo simple (1). Supongamos que existe una solución periódica con frecuencia ω y amplitud a . Reescalando las variables t y θ (pero manteniendo sus nombres para simplificar la notación) se obtiene

$$\omega^2 a \ddot{\theta}(t) + \text{sen}(a\theta(t)) = 0. \quad (10)$$

La solución θ_P correspondiente tendrá frecuencia y amplitud 1; en particular se verifica $\theta_P(0) = 1$ y $\dot{\theta}_P(0) = 0$. A partir de la ecuación anterior definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_q[\phi] &= N[\phi(t, q), \Omega(q), A(q)] \\ &= \Omega(q)^2 A(q) \frac{\partial^2 \phi(t, q)}{\partial t^2} + \text{sen}(A(q)\phi(t, q)), \end{aligned}$$

y el operador \mathcal{L} como en (8a). Utilizando el HAM descrito en la sección 3 la solución periódica de (10) resulta $\phi(t, 1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \theta_k(t)$, siendo $\omega = \Omega(1)$ y $a = A(1)$. Considerando las condiciones iniciales de la solución buscada tomamos $\theta_0(t) = \text{cost}$. Luego, de acuerdo a los operadores definidos antes, el lado derecho de (9) para $k = 1$ resulta

$$h(-\omega_0^2 a_0 \text{cost} + \text{sen}(a_0 \text{cost})).$$

Dividiendo por $h \neq 0$ y utilizando la expansión de Jacobi–Anger se obtiene:

$$-\omega_0^2 a_0 \text{cost} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n J_{2n+1}(a_0) \cos((2n+1)t), \quad (11)$$

donde J_n es la función de Bessel de primera clase de orden n . Teniendo en cuenta la definición del operador \mathcal{L}_1 en (8a), el término θ_1 será periódico si el coeficiente de cost en (11) se anula, esto es, si

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2J_1(a_0)}{a_0}}. \quad (12)$$

Fijando un valor de a_0 la ecuación anterior permite obtener un valor de ω_0 , y calcular el término periódico θ_1 . Al realizar los cálculos para los demás valores de k , y considerando los desarrollos en serie de $\text{sen}(a_0 \text{cost})$ y $\text{cos}(a_0 \text{cost})$ que resultan de utilizar la expansión de Jacobi–Anger, se observa que la condición es una única ecuación (correspondiente a anular el coeficiente de cost en el lado derecho de (9)), que brindará la relación que deben verificar los valores ω_{k-1} y a_{k-1} . Por lo tanto, como en el caso $k = 1$, fijando el valor de a_{k-1} se pueden obtener ω_{k-1} y θ_k , y continuar el proceso hasta el orden deseado.

Pero, ¿cómo fijamos los valores a_k para $k \geq 0$? Se puede probar que la ecuación del péndulo simple tiene un centro no lineal en el equilibrio trivial. Más aún, existe una solución periódica de (1) para cada condición inicial $\theta(0) \in (0, \pi)$, $\dot{\theta}(0) = 0$. Luego, si tomamos $a_0 \in (0, \pi)$ y $a_k = 0$ para $k \geq 1$, el HAM permite calcular la solución θ_P de (10) y la frecuencia ω correspondientes a la amplitud $a = a_0$.

Resultados. Para una oscilación de amplitud a la ecuación de la energía (2) permite calcular la correspondiente velocidad v_0 en $\theta = 0$. Luego, fijando $a = \arccos(1 - v_0^2/2)$ y utilizando el proceso anterior podemos obtener las expresiones de la solución y la frecuencia en función de la velocidad inicial $0 < v_0 < 2$.

Como un primer ejemplo se fija $v_0 = 1.95$ y se calcula la aproximación de la solución correspondiente hasta orden 15. En la Figura 2 a) se muestran los polinomios en función de h para la frecuencia ω , y los valores $\theta_P(0.1)$ y $\ddot{\theta}_P(0.1)$. Se observa que, de acuerdo a lo mencionado en la sección anterior, se puede elegir fácilmente un h adecuado. En la Figura 2 b) se muestra la solución calculada junto con la exacta dada en (3).

Por otro lado, utilizando el método descrito es posible calcular aproximaciones de la frecuencia ω en función de la amplitud y por lo tanto de la velocidad inicial v_0 . Así, se puede obtener por ejemplo la siguiente aproximación de orden 3:

$$\omega_{\text{HAM}} \approx \sqrt{\frac{2J_1(a)}{a}} + \frac{h\sqrt{a}J_2(a)J_3(a)}{8\sqrt{2}J_1(a)} + \frac{hJ_2(a)J_3(a)}{768\sqrt{2}(aJ_1(a))^{3/2}} (-12a^2hJ_0^2(a) + a(240 - 11a^2)hJ_0(a)J_1(a) + 2J_1(a)(48a^2 + (-216 + 131a^2)hJ_1(a))),$$

siendo $a = \arccos(1 - v_0^2/2)$.

Se conocen distintas aproximaciones del período (4) que se calculan utilizando por ejemplo el desarrollo en serie de la integral elíptica o el método de balance de armónicos. El cálculo utilizando un caso particular del HAM (llamado *homotopy perturbation method*) se puede encontrar en [3]. La aproximación de la frecuencia de orden 1 allí encontrada coincide con (12), pero no sucede lo mismo con la aproximación de orden 2. En la Figura 2 c) se compara el período exacto (4) con las aproximaciones usando la frecuencia de orden 2 obtenida en [3] y nuestro resultado ω_{HAM} . Se advierte la coincidencia con el resultado exacto para velocidades $v_0 < 1.9$: el error relativo es menor al 0.5% para ambas aproximaciones. Sin embargo, para $v_0 > 1.9$ se observa claramente que nuestro resultado aproxima mejor el valor exacto.

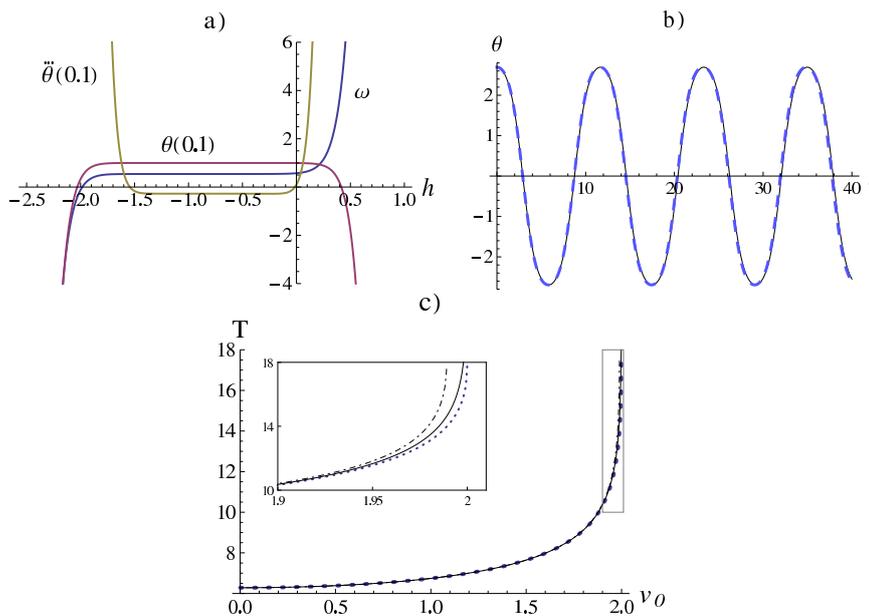


FIGURA 2. a) Polinomios en función de h para $v_0 = 1.95$. b) Solución exacta y aproximada con HAM. c) Comparación períodos: (–) exacto dado en (4), (– . –) calculado en [3], y (⋯) $2\pi/\omega_{\text{HAM}}$.

3.2. HAM: Movimiento rotatorio. Para calcular las soluciones rotatorias de (1) consideremos el siguiente cambio de coordenadas del cilindro al plano punteado:

$$\begin{cases} u = e^{\theta} \cos \theta \\ v = e^{\theta} \sin \theta \end{cases} .$$

La ecuación del péndulo en las nuevas coordenadas resulta

$$\begin{cases} \dot{u} = -u \operatorname{sen}(\arctan(v/u)) - \frac{1}{2}v \log(u^2 + v^2) \\ \dot{v} = -v \operatorname{sen}(\arctan(v/u)) + \frac{1}{2}u \log(u^2 + v^2) \end{cases} \quad (13)$$

Supongamos que existe una solución periódica con frecuencia ω y tal que $(u(0), v(0)) = (e^\xi, 0)$. Normalizamos el sistema (13) de manera que la nueva solución periódica (u_P, v_P) tenga frecuencia 1 y verifique $(u_P(0), v_P(0)) = (1, 0)$ (para simplificar la notación mantene-mos los nombres de las variables luego de la normalización). Se obtiene

$$\begin{cases} \omega \dot{u} = -u \operatorname{sen}(\arctan(v/u)) - v\xi - \frac{1}{2}v \log(u^2 + v^2) \\ \omega \dot{v} = -v \operatorname{sen}(\arctan(v/u)) + u\xi + \frac{1}{2}u \log(u^2 + v^2) \end{cases} \quad (14)$$

Para encontrar las soluciones periódicas del sistema anterior se utiliza el HAM descrito en la sección 3 con \mathcal{L}_2 el operador definido en (8b) y \mathcal{N}_q dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_q[\phi_1, \phi_2] &= N[(\phi_1(t, q), \phi_2(t, q)), \Omega(q), \Xi(q)] \\ &= \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \phi_1 \operatorname{sen}(\arctan(\phi_2/\phi_1)) + \phi_2 \Xi + \frac{1}{2} \phi_2 \log(\phi_1^2 + \phi_2^2) \\ \Omega \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \phi_2 \operatorname{sen}(\arctan(\phi_2/\phi_1)) - \phi_1 \Xi - \frac{1}{2} \phi_1 \log(\phi_1^2 + \phi_2^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Así, la solución periódica de (14) será $(u_P, v_P) = (\phi_1(t, 1), \phi_2(t, 1))$, siendo $\omega = \Omega(1)$ y $\xi = \Xi(1)$. De acuerdo a las condiciones en $t = 0$ tomamos $(u_0(t), v_0(t)) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. El lado derecho de (9) para $k = 1$, dividido por $h \neq 0$ resulta

$$\begin{pmatrix} -\omega_0 \operatorname{sen} t + \cos t \operatorname{sen} t + \xi_0 \operatorname{sen} t \\ \omega_0 \cos t + \operatorname{sen}^2 t - \xi_0 \cos t \end{pmatrix}.$$

En este caso, considerando el operador inverso de \mathcal{L}_2 , para que el término (u_k, v_k) sea periódico deben anularse los coeficientes de $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$ en la siguiente expresión:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^{k-1} N_1}{\partial q^{k-1}} \right) - \frac{\partial^{k-1} N_2}{\partial q^{k-1}} \right) \Big|_{q=0},$$

para $k \geq 1$. Como en el caso anterior, uno de estos coeficientes se anula para todo k y el restante da una relación entre ω_{k-1} y ξ_{k-1} . La primera de estas condiciones implica que $\omega_0 = \xi_0$. De acuerdo al cambio de coordenadas utilizado es conveniente fijar el valor $\xi_0 = \dot{\theta}(0) > 2$, y $\xi_k = 0$ si $k \geq 1$. Si $\dot{\theta}(0) < -2$ el sentido de las soluciones cambia y en este caso la condición inicial adecuada es $(u_0(t), v_0(t)) = (\cos t, -\operatorname{sen} t)$. Dada la simetría de las soluciones rotatorias solo se considera el caso $\xi_0 > 2$. Fijados los valores de ξ_{k-1} se pueden calcular los términos ω_{k-1} y (u_k, v_k) , y determinar el desarrollo de la solución (u_P, v_P) y la frecuencia ω correspondientes a la condición inicial $(e^\xi, 0)$ hasta el orden deseado. En las coordenadas originales la solución hallada corresponde a la solución rotatoria con velocidad $v_0 = \xi > 2$ para $\theta = 0$.

Resultados. Dado un valor $v_0 > 2$ podemos calcular el movimiento rotatorio correspondiente. Como en el caso anterior, una vez realizados los cálculos hasta el orden deseado se observan los polinomios en función de h y se elige un valor adecuado de este parámetro. En la Figura 3 a) se muestra la solución exacta (5) junto con la aproximada usando el HAM hasta orden 8 para $v_0 = 3$ y $v_0 = 4$. Las soluciones se muestran tanto en el espacio (u, v) como en el espacio de coordenadas original $(\theta, \dot{\theta})$.

Además, en este caso también es posible calcular aproximaciones de la frecuencia ω en función de la velocidad inicial v_0 . La aproximación para orden 8 resulta

$$\begin{aligned} \omega_{\text{HAM}} = & v_0 + 8h + \frac{7}{2}h^2(8v_0 + 1) + \frac{7}{2}h^3(16v_0^2 + 4v_0 + 25) \\ & + \frac{35}{192}h^4(384v_0^3 + 144v_0^2 + 1800v_0 + 269) \\ & + \frac{7}{60}h^5(480v_0^4 + 240v_0^3 + 4500v_0^2 + 1345v_0 + 2087) \\ & + h^6\left(28v_0^5 + \frac{35v_0^4}{2} + \frac{875v_0^3}{2} + \frac{9415v_0^2}{48} + \frac{14609v_0}{24} + \frac{437017}{4608}\right) \\ & + h^7\left(8v_0^6 + 6v_0^5 + \frac{375v_0^4}{2} + \frac{1345v_0^3}{12} + \frac{2087v_0^2}{4} + \frac{62431v_0}{384} + \frac{185701}{1536}\right) \\ & + h^8\left(v_0^7 + \frac{7v_0^6}{8} + \frac{525v_0^5}{16} + \frac{9415v_0^4}{384} + \frac{14609v_0^3}{96} + \frac{437017v_0^2}{6144} + \frac{1299907v_0}{12288}\right. \\ & \left. + \frac{101836543}{6193152}\right). \end{aligned}$$

En la Figura 3 b) se compara el período (6) con el calculado a partir de la aproximación anterior con $h = -0.15$. Para valores de v_0 entre 3.2 y 15 el error relativo de la aproximación no supera el 1%. Para valores $v_0 < 3.2$ el error aumenta considerablemente, pero puede mejorarse calculando aproximaciones de mayor orden.

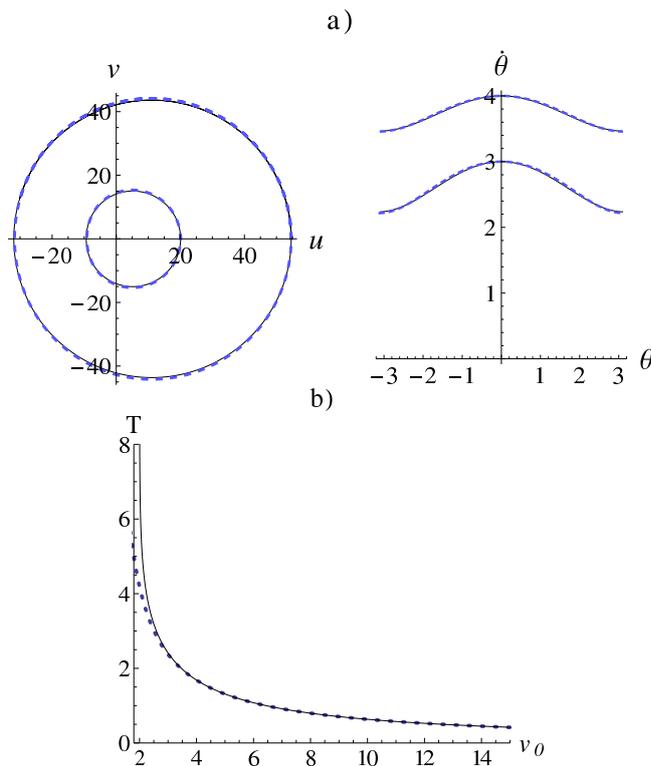


FIGURA 3. a) Soluciones rotatorias en los dos sistemas de coordenadas. b) Comparación períodos: (—) exacto dado en (6), y (---) $2\pi/\omega_{\text{HAM}}$.

4. PÉNDULO MODIFICADO

Consideremos ahora una modificación de la ecuación del péndulo simple. Debido a que el espacio de fases es un cilindro se agregan a ella términos hasta orden 3 que sean periódicos en la coordenada angular. La ecuación del péndulo así modificada resulta

$$\ddot{\theta} + \text{sen } \theta = (\alpha_1 \dot{\theta} + \alpha_2 \dot{\theta}^2) \text{sen } \theta + \beta_1 \dot{\theta} + \beta_2 \dot{\theta}^2 + \beta_3 \dot{\theta}^3. \quad (15)$$

En este caso la normalización se realiza reemplazando θ por $c + a\theta$, y suponiendo que existe una solución periódica con frecuencia ω , resulta

$$\begin{aligned} \omega^2 a \ddot{\theta} + \text{sen}(c + a\theta) &= (\alpha_1 \omega a \dot{\theta} + \alpha_2 \omega^2 a^2 \dot{\theta}^2) \text{sen}(c + a\theta) \\ &+ \beta_1 \omega a \dot{\theta} + \beta_2 \omega^2 a^2 \dot{\theta}^2 + \beta_3 \omega^3 a^3 \dot{\theta}^3. \end{aligned} \quad (16)$$

Luego, la nueva solución periódica θ_P tendrá frecuencia y amplitud 1, y estará centrada en 0; en particular esta función verifica $\theta_P(0) = 1$ y $\dot{\theta}_P(0) = 0$ (en este caso, por amplitud se entiende el valor máximo que alcanza la función; en la ecuación original la amplitud de la solución periódica es $c + a$).

Una vez más consideremos la homotopía descrita en la sección 3. Definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_q[\phi] &= N[\phi(t, q), \Omega(q), C(q), A(q)] \\ &= \Omega^2 A \frac{\partial^2 \phi(t, q)}{\partial t^2} + \text{sen}(C + A\phi(t, q)) \\ &\quad - \left(\alpha_1 \Omega A \frac{\partial \phi(t, q)}{\partial t} + \alpha_2 \Omega^2 A^2 \frac{\partial \phi(t, q)^2}{\partial t} \right) \text{sen}(C + A\phi(t, q)) \\ &\quad - \left(\beta_1 \Omega A \frac{\partial \phi(t, q)}{\partial t} + \beta_2 \Omega^2 A^2 \frac{\partial \phi(t, q)^2}{\partial t} + \beta_3 \Omega^3 A^3 \frac{\partial \phi(t, q)^3}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

y el operador \mathcal{L}_1 como en (8a). De acuerdo a lo mencionado en la sección 3, la solución de (16) buscada será $\theta_P(t) = \phi(t, 1)$, siendo $\omega = \Omega(1)$, $c = C(1)$ y $a = A(1)$. Por la normalización utilizada c concentra toda la parte constante de la solución, y así todos los términos $\theta_k(t)$ estarán centrados en 0. Esto implicará una condición extra (además de que se anulen los coeficientes de $\cos t$ y $\text{sen } t$) sobre el lado derecho de la ecuación (9), y se formará un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas ω_{k-1} , c_{k-1} y a_{k-1} para cada $k \geq 1$. La semilla inicial en este caso es $\theta_0(t) = \cos t$. Las condiciones sobre el lado derecho de (9) para $k = 1$ resultan:

$$\begin{cases} 2J_0(a_0) \text{sen } c_0 - a_0 \omega_0^2 (a_0 \beta_2 + 2\alpha_2 J_1(a_0) \text{sen } c_0) = 0 \\ -a_0 \omega_0^2 + 2(J_1(a_0) - a_0 \omega_0^2 \alpha_2 J_2(a_0)) \cos c_0 = 0 \\ \beta_1 + \frac{3}{4} a_0^2 \omega_0^2 \beta_3 + \alpha_1 (J_0(a_0) + J_2(a_0)) \text{sen } c_0 = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Determinados los valores de ω_0 , c_0 y a_0 a partir de este sistema, es posible calcular θ_1 y obtener la ecuación para θ_2 . Como en los casos anteriores, las condiciones para $k \geq 2$ generan un sistema lineal que puede resolverse exactamente y permite calcular θ_k . Siguiendo este proceso, se obtienen los desarrollos de las soluciones hasta un orden arbitrario.

Resultados. Los equilibrios de la ecuación (15) son los mismos que los del péndulo simple. Utilizando un análisis lineal resulta que el equilibrio trivial es estable si $\beta_1 < 0$ e inestable si $\beta_1 > 0$. Para $\beta_1 = 0$ el sistema verifica las condiciones clásicas para la existencia de bifurcación de órbitas periódicas a partir de un equilibrio (bifurcación de Hopf). Es decir, existe un par de autovalores imaginarios puros conjugados que cruzan el eje imaginario cuando el parámetro β_1 varía.

El HAM, tal como ha sido implementado en este trabajo, no permite obtener condiciones generales para las bifurcaciones en función de los parámetros. El estudio de bifurcaciones de Hopf locales se realiza utilizando otra metodología, que combina métodos en el dominio frecuencia [15] y la teoría de singularidades [8, 9]. Esta última permite calcular ciertos coeficientes, equivalentes a los coeficientes de Lyapunov [18], que proveen condiciones para la clasificación de las singularidades y sus desarrollos universales. Esto se hace utilizando el algoritmo desarrollado en [16]. Se determinan regiones en el espacio de parámetros para las cuales múltiples órbitas periódicas se bifurcan a partir del equilibrio trivial. Los diagramas de bifurcación locales correspondientes a cada una de las regiones pueden complementarse y compararse con los realizados con el HAM. En particular, se realizan cálculos para valores apropiados de los parámetros cercanos a puntos singulares donde los paquetes de simulación numérica usuales fallan.

Como se verifican las condiciones necesarias para la existencia de bifurcación de Hopf para $\beta_1 = 0$, se encuentra una ecuación que relaciona al parámetro de bifurcación β_1 con la amplitud de la órbita periódica γ . Para $\gamma \neq 0$ suficientemente pequeño se tiene en general

$$\gamma(-\beta_1 + \varepsilon_0 + \varepsilon_2 \gamma^2 + \varepsilon_4 \gamma^4 + \dots) = 0, \quad (18)$$

donde los coeficientes ε_{2k} , $k = 0, 1, 2, \dots$, se obtienen utilizando por ejemplo las metodologías propuestas en [18, 16]. En el diagrama de esta ecuación, $\gamma = 0$ se corresponde con el equilibrio trivial, y las soluciones no nulas representan las soluciones periódicas con período cercano a 2π .

Si $\varepsilon_{2l} \neq 0$ y $\varepsilon_{2k} = 0$ para $k = 0, 1, 2, \dots, l-1$ en la ecuación (18), se obtienen formas normales singulares de \mathbb{Z}_2 -codimensión $l-1$, cuyos diagramas de bifurcación son no persistentes [9]. Esto significa que bajo pequeñas perturbaciones de los parámetros el diagrama obtenido no resulta equivalente al de la forma normal singular, con la noción de equivalencia en el contexto de la teoría de singularidades.

Para la ecuación del péndulo modificado (15) alrededor del equilibrio trivial, considerando a β_1 como parámetro de bifurcación, los primeros coeficientes calculados con la metodología propuesta en [16] tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_3) &= 0, \\ \varepsilon_2(\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_3) &= \frac{1}{2}(-\alpha_1\beta_2 - 3\beta_3), \\ \varepsilon_4(\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_3) &= \frac{1}{12}((1 + 4\alpha_2 + 8\beta_2^2)(\alpha_1\beta_2 + 3\beta_3) + 8\alpha_1^2\beta_3). \end{aligned}$$

Se considera como caso particular $\alpha_2 = 0.2$ y $\beta_2 = 0.2$, y se realiza el análisis, hasta codimensión uno, de las regiones con distintos diagramas de bifurcación locales en el espacio de parámetros (α_1, β_3) .

Si $\varepsilon_2(\alpha_1, 0.2, 0.2, \beta_3) \neq 0$, este coeficiente es suficiente para predecir el comportamiento local [8, 9], y las formas normales son de codimensión cero. La curva $\varepsilon_2(\alpha_1, 0.2, 0.2, \beta_3) = 0$ divide el espacio (α_1, β_3) en dos regiones en las cuales se tienen diagramas clásicos de bifurcación de Hopf, que predicen la aparición de una única órbita periódica local con su determinada estabilidad (ver Figura 4).

Si $\varepsilon_2(\alpha_1, 0.2, 0.2, \beta_3) = 0$, es necesario calcular $\varepsilon_4(\alpha_1, 0.2, 0.2, \beta_3)$; en caso de que este último no se anule, se obtiene la forma normal singular de codimensión uno $\gamma(-\beta_1 + \varepsilon_4 \gamma^4) = 0$ (ver Figura 5).

Para valores de los parámetros cercanos a la recta $\varepsilon_2(\alpha_1, 0.2, 0.2, \beta_3) = 0$ se considera el desarrollo universal de la forma normal y se obtienen los diagramas de bifurcación locales que predicen la existencia de hasta dos órbitas periódicas. En la Figura 6 se muestran las

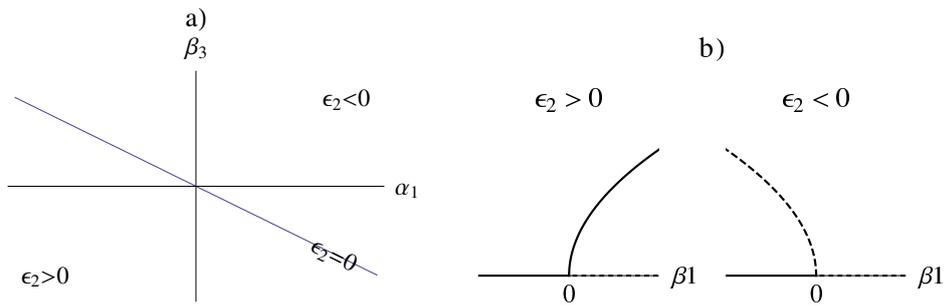


FIGURA 4. a) Curva $\epsilon_2(\alpha_1, 0.2, 0.2, \beta_3) = 0$ y regiones de diagramas persistentes en (α_1, β_3) de acuerdo al signo de ϵ_2 . b) Diagramas de bifurcación en (β_1, γ) .

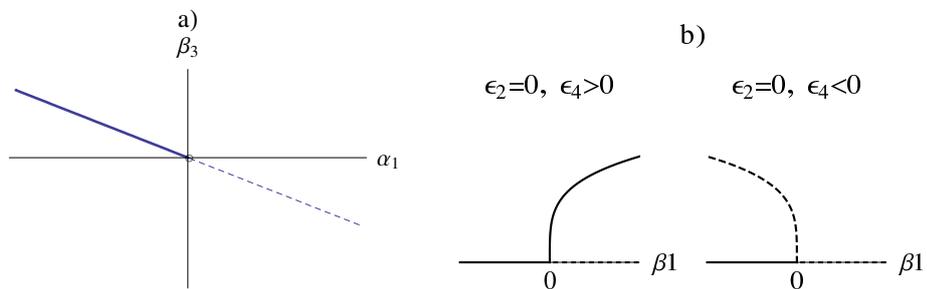


FIGURA 5. a) Se señalan con línea gruesa continua los puntos en los que $\epsilon_2 = 0$ y $\epsilon_4 > 0$, y con línea punteada los puntos donde $\epsilon_2 = 0$ y $\epsilon_4 < 0$. b) Diagramas de bifurcación correspondientes a puntos sobre la recta en a).

curvas $\epsilon_2(\alpha_1, 0.2, 0.2, \beta_3) = 0$ y $\epsilon_4(\alpha_1, 0.2, 0.2, \beta_3) = 0$, y se indican las regiones en las que se obtienen los distintos diagramas de bifurcación.

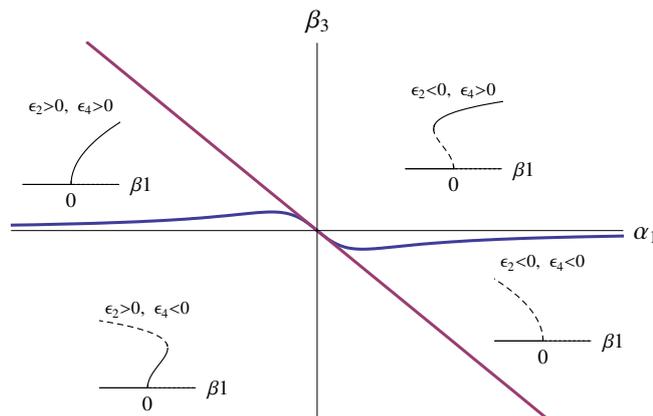


FIGURA 6. Para valores cercanos a la recta $\epsilon_2 = 0$ y la curva $\epsilon_4 = 0$ se indican los diagramas de bifurcación correspondientes a cada región.

Si $\epsilon_2(\alpha_1, 0.2, 0.2, \beta_3) = 0$ y $\epsilon_4(\alpha_1, 0.2, 0.2, \beta_3) = 0$ (condición que se cumple en el punto $(\alpha_1, \beta_3) = (0, 0)$), la dinámica dependerá del valor de ϵ_6 en ese punto. Este coeficiente no ha sido calculado en este trabajo.

Como se mencionó, los resultados anteriores son locales alrededor del equilibrio trivial, y se pueden complementar con los realizados utilizando el HAM. Como un ejemplo de esta situación fijemos el valor del parámetro $\alpha_3 = 0.5$. En la Figura 7 a) se muestran las amplitudes de los ciclos calculados utilizando el HAM junto con los obtenidos con el programa MATCONT para varios valores de β_3 ; se indica además su estabilidad, que coincide con la predicha utilizando los coeficientes ε_2 y ε_4 . En general se observa que los resultados del HAM mejoran a medida que nos alejamos de la recta $\varepsilon_2(\alpha_1, 0.2, 0.2, \beta_3) = 0$, y no dependen de la cercanía al valor de bifurcación $\beta_1 = 0$. Por otro lado, para valores cercanos a la recta $\varepsilon_2 = 0$ el método falla al encontrar condiciones iniciales. En la Figura 7 b) se muestra una ampliación de la región cercana a la bifurcación de Hopf, y se comparan las amplitudes obtenidas con MATCONT y las que resultan de utilizar la metodología en frecuencia con el orden adecuado a la región en que se encuentra el parámetro β_3 .

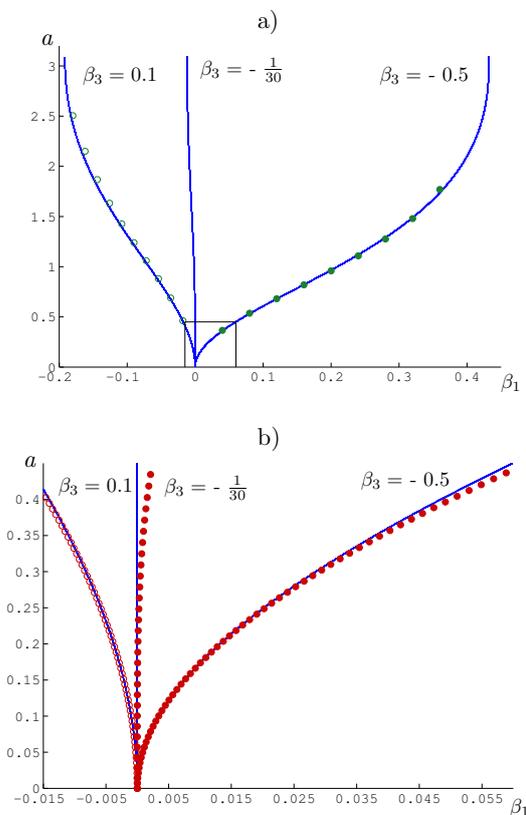


FIGURA 7. a) —: MATCONT, $\circ\circ\circ$: HAM, b) —: MATCONT, $\circ\circ\circ$: amplitudes usando metodología en frecuencia.

5. PÉNDULO REALIMENTADO CON RETARDO

Consideremos el péndulo con retardo dado por

$$\ddot{\theta}(t) + \text{sen}(\theta(t)) = d \text{sen}(\theta(t - \tau)), \quad (19)$$

donde $\tau > 0$ representa el retardo. Suponiendo que existe una solución periódica con frecuencia ω y amplitud a , normalizamos la ecuación anterior para obtener

$$\omega^2 a \ddot{\theta}(t) + \text{sen}(a\theta(t)) = d \text{sen}(a\theta(t - \omega\tau)). \quad (20)$$

Buscamos una solución periódica θ_p de la ecuación (20) con frecuencia y amplitud 1; en particular para $t = 0$ se verifica $\theta_p(0) = 1$ y $\dot{\theta}_p(0) = 0$. Para usar el HAM descrito en la sección 3 definimos el operador lineal \mathcal{L} como en (8a) y el siguiente operador no lineal asociado a (20):

$$\mathcal{N}_q[\phi] = N[\phi(t, q), \Omega(q), A(q)] = \Omega^2 A \frac{\partial^2 \phi(t, q)}{\partial t^2} + \text{sen}(A\phi(t, q)) - d \text{sen}(A\phi(t - \Omega\tau, q)).$$

Luego, utilizando la homotopía, la solución buscada será $\theta_p(t) = \phi(t, 1)$, siendo $\omega = \Omega(1)$ y $a = A(1)$. De acuerdo a las condiciones iniciales de la ecuación normalizada se considera $\theta_0(t) = \cos t$. Luego de reemplazar en (9) para $k = 1$, usando los operadores definidos antes y llamando $\kappa = a_0 \cos(\omega_0 \tau)$ y $\sigma = a_0 \text{sen}(\omega_0 \tau)$, las condiciones para que el término θ_1 sea periódico resultan

$$\begin{cases} -a_0 \omega_0^2 + 2J_1(a_0) - 2d \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(\kappa) (J_{2n}(\sigma) + J_{2n+2}(\sigma)) = 0, \\ 2d \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(\sigma) (J_{2n}(\kappa) + J_{2n+2}(\kappa)) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Para valores fijos de los parámetros se resuelve el sistema anterior para determinar ω_0 y a_0 ; luego se calcula θ_1 , y se construye la ecuación para θ_2 utilizando (9) con $k = 2$. Para que este último resulte periódico se construye un nuevo sistema de condiciones (que será lineal para $k \geq 2$) y se continúa el proceso para obtener los desarrollos de θ_p , ω y a , hasta el orden deseado.

Resultados. A partir del sistema (21) es posible hallar condiciones necesarias en el espacio (d, τ) para la existencia de bifurcaciones de Hopf en la ecuación (19). Estas condiciones, que se obtienen considerando amplitud inicial a_0 nula, resultan

$$\begin{cases} d \cos(\omega\tau) = 1 - \omega^2 \\ d \text{sen}(\omega\tau) = 0 \end{cases}.$$

El sistema anterior define curvas en el espacio (d, τ) , dadas por

$$\tau = \frac{2n\pi}{\sqrt{1-d}} \quad \text{y} \quad \tau = \frac{(2n+1)\pi}{\sqrt{1+d}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En la Figura 8 a) se grafican estas curvas. En los puntos de intersección de estas el sistema puede presentar bifurcaciones de Hopf dobles.

Se calcula la estabilidad lineal del equilibrio trivial y en la Figura 8 a) se somborean las regiones en las que este es estable. Las condiciones para la existencia de autovalores imaginarios puros conjugados (asociados a las bifurcaciones de Hopf) coinciden con las obtenidas antes. Para los valores $d = 1$ cualquier constante es solución de la ecuación (19). Si $d = 0$ la ecuación se reduce a la del péndulo simple que estudiamos anteriormente, y por lo tanto el equilibrio trivial presenta un centro no lineal.

En la Figura 8 b) se muestran amplitudes de los ciclos existentes para algunos valores fijos del retardo τ ; se indica la estabilidad calculada utilizando el método de colocación. Los resultados coinciden con los obtenidos utilizando DDE-BIFTOOL. Esto se muestra en particular para el caso $\tau = 8.2$ en la Figura 9. Este valor es de particular interés ya que en las cercanías se observa una bifurcación Neimark–Sacker resonante 1:3, esto es, el ciclo estable existente pierde su estabilidad cuando los autovalores cruzan el círculo unidad a través de $e^{\pm i2/3\pi}$. Tal resonancia está asociada a la existencia de ciclos de período tres.

Aplicaciones interesantes utilizando modelos de péndulos con retardo son consideradas en diversos trabajos actuales, por ejemplo en el caso de un péndulo simple forzado (ver [17]), y en el caso de un péndulo invertido en el carrito y los distintos controles realimentados que se pueden implementar (ver [11]).

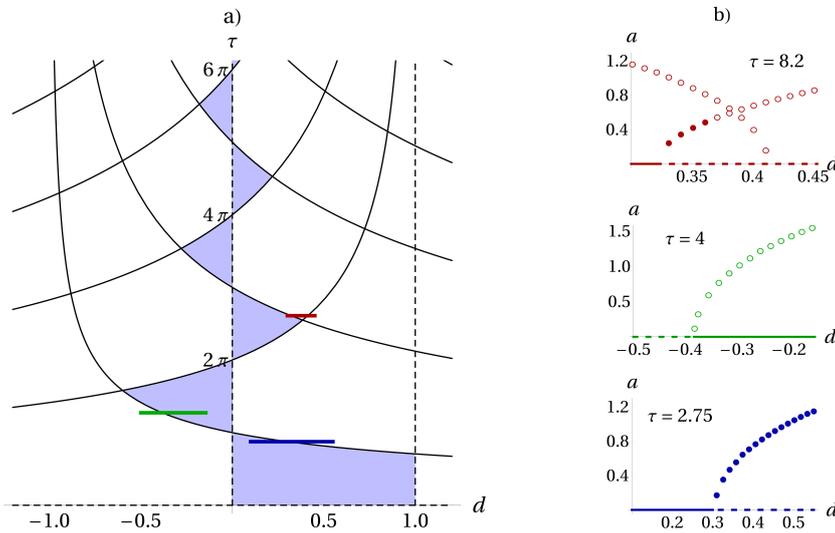


FIGURA 8. a) Curvas de Hopf en el espacio (d, τ) . b) Amplitudes de los ciclos para los valores de τ indicados en a).

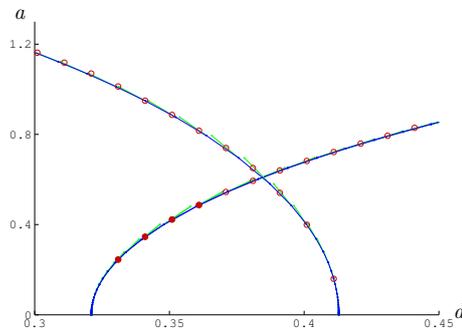


FIGURA 9. Comparación de amplitudes para $\tau = 8.2$: —: DDE-BIFTOOL, ooo: HAM.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo mostramos la potencialidad que el HAM presenta como herramienta para encontrar las soluciones periódicas tanto globales como locales en el análisis de las bifurcaciones del péndulo simple y dos variaciones del mismo, una de ellas con retardo.

Los resultados obtenidos con el HAM para las soluciones oscilatorias y rotatorias del péndulo simple son muy buenos comparados con los clásicos, que resultan de utilizar funciones elípticas de Jacobi, incluso para soluciones cercanas a las órbitas homóclinas. El uso del HAM en el péndulo modificado provee resultados globales, que coinciden con gran

precisión con los que provienen de utilizar el programa MATCONT. En el caso local complementan el análisis de las bifurcaciones encontradas por métodos analíticos y numéricos, que predicen multiplicidad de órbitas periódicas. Por último, consideramos el péndulo modificado con una realimentación por retardo, estudiamos las condiciones para la existencia de bifurcaciones de Hopf y los ciclos que de allí surgen. Los cálculos realizados con el HAM muestran gran coincidencia con los numéricos encontrados con el paquete DDE-BIFTOOL.

REFERENCIAS

- [1] R. ALDROVANDI AND P. L. FERREIRA, *Quantum pendulum*, Am. J. Phys., 48 (1980), 660–664.
- [2] A. BEL AND W. REARTES, *The homotopy analysis method in bifurcation analysis of delay differential equations*. Aceptado para publicación en International Journal of Bifurcation and Chaos, 2011.
- [3] A. BELÉNDEZ, C. PASCUAL, M. L. ÁLVAREZ, D. I. MÉNDEZ, M. S. YEBRA, AND A. HERNÁNDEZ, *Higher order analytical approximate solutions to the nonlinear pendulum by He's homotopy method*, Physica Scripta, 79 015009 (2009).
- [4] O. CALIN AND D.-C. CHANG, *Geometric Mechanics on Riemannian Manifolds*, Birkhäuser, 2005.
- [5] G. CHEN, ed., *Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering Systems*, CRC Press, 1999.
- [6] A. DHOOGHE, W. GOVAERTS, AND Y. A. KUZNETSOV, *MATCONT: A MATLAB package for numerical bifurcation analysis of ODEs*, ACM Transactions on Mathematical Software, 29 (2003).
- [7] K. ENGELBORGH, T. LUZYANINA, AND G. SAMAEY, *DDE-BIFTOOL v. 2.00: a MATLAB package for bifurcation analysis of delay differential equations*, Technical Report TW 330, Department of Computer Science, K.U. Leuven, Leuven, Belgium, 2001.
- [8] M. GOLUBITSKY AND W. F. LANGFORD, *Classification and unfoldings of degenerate Hopf bifurcations*, J. Differential Equations, 41 (1981), 375–415.
- [9] M. GOLUBITSKY AND D. G. SCHAEFFER, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, vol. I, Springer-Verlag, 1985.
- [10] L. D. LANDAU AND E. M. LIFSHITZ, *Mecánica Clásica*, vol. 1 of Curso de Física Teórica, Reverté, 1969.
- [11] M. LANDRY, S. A. CAMPBELL, K. MORRIS, AND C. O. AGUILAR, *Dynamics of an inverted pendulum with delayed feedback control*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 4 (2005), 333–351.
- [12] S. LIAO, *Beyond Perturbation. Introduction to the Homotopy Analysis Method*, Chapman & Hall/CRC, 2004.
- [13] ———, *Notes on the homotopy analysis method: some definitions and theorems*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 14 (2009), 983–997.
- [14] S. LIAO AND Y. TAN, *A general approach to obtain series solutions of nonlinear differential equations*, Stud. Appl. Math., 119 (2007), 297–354.
- [15] J. L. MOIOLA AND G. CHEN, *Hopf Bifurcation Analysis: A Frequency Domain Approach*, vol. 21 of World Scientific Series on Nonlinear Science, World Scientific Publishing, 1996.
- [16] A. TORRESI, G. CALANDRINI, P. BONFILI, AND J. MOIOLA, *Generalized Hopf bifurcation in a frequency domain formulation*. Aceptado para publicación en International Journal of Bifurcation and Chaos, 2011.
- [17] Y. YOKOI AND T. HIKIHARA, *Tolerance of start-up control of rotation in parametric pendulum by delayed feedback*, Physics Letters A, 375 (2011), 1779–1783.
- [18] P. YU AND G. CHEN, *Computations of focus values with applications*, Nonlinear Dynamics, 3 (2008), 409–427.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR Y CONICET
E-mail: andreabelnqn@gmail.com

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR