ACTAS DEL XI CONGRESO
DR. ANTONIO A. R. MONTEIRO (2011)
2012, Páginas 63–82

UN ENFOQUE GEOMÉTRICO DEL ESTUDIO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE ABEL DE PRIMERA Y SEGUNDA CLASE

JOSÉ F. CARIÑENA, JAVIER DE LUCAS, AND MANUEL F. RAÑADA

RESUMEN. Se hace uso de una generalización reciente del concepto de sistema de Lie para estudiar las ecuaciones de Abel de primer orden y primera clase. El método, que está basado en la teoría de los sistemas de cuasi-Lie, nos permite caracterizar algunos casos particulares de ecuaciones de Abel que son integrables. También discutimos las ecuaciones de Abel de orden superior y el correspondiente problema inverso para las de segundo orden, así como probamos la existencia de dos formulaciones lagrangianas alternativas, ambas con Lagrangianos no naturales. La determinación de dichos Lagrangianos se lleva a cabo mediante la búsqueda de los polinomios de Darboux y los multiplicadores de Jacobi para estos sistemas de tipo polinómico.

1. INTRODUCCIÓN

La teoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales presenta múltiples aplicaciones en casi todas las ramas de la ciencia y la tecnología. La búsqueda de soluciones particulares, e incluso más la de la solución general, es un problema complejo y las técnicas disponibles dependen muy específicamente de las particularidades de cada caso concreto, y en particular la teoría de la simetría es uno de los ingredientes básicos para la reducción de unos sistemas a otros más sencillos.

El ejemplo más simple es el de los sistemas lineales, precisamente porque existe un principio de superposición lineal de soluciones de dichos sistemas de ecuaciones. Esta característica fue la que llevó a Lie a formular el problema de caracterizar aquellos sistemas de ecuaciones diferenciales que admiten un *principio de superposición* de soluciones, aun cuando no sea lineal ([28], [30]). Aparecieron así los hoy denominados *sistemas de Lie* [37], que han demostrado ser de muchísima aplicación tanto en matemáticas como en física, economía o ingeniería ([5], [11], [13], [21], [22], [23]).

Los sistemas de Lie, que generalizan a los sistemas lineales, contienen como un ejemplo particular, muy interesante por su ubicuidad en muchas ramas de la ciencia, la ecuación de Riccati [5], [39]. Nuestro objetivo es presentar una descripción de los progresos recientemente realizados en el estudio de una ecuación más general que se conoce como la ecuación de Abel, estudiando algunos casos particulares para los que se puede formular un principio de superposición de soluciones.

Indiquemos en primer lugar que existen diversas ecuaciones diferenciales que reciben el nombre de ecuaciones de Abel [16]. La más usual es la ecuación diferencial de Abel de primer orden y de primera clase

$$\dot{x} = A_0(t) + A_1(t)x + A_2(t)x^2 + A_3(t)x^3, \tag{1}$$

que para $A_3 = 0$ se reduce a una ecuación de Riccati. Estas ecuaciones fueron introducidas por N.H. Abel dentro de la teoría de las funciones elípticas [1].

Palabras clave. ecuación de Abel, sistema de Lie, multiplicador de Jacobi.

Existe también la denominada ecuación de Abel de primer orden y de segunda clase

$$(y+f(t))\,\dot{y} = B_0(t)+B_1(t)y+B_2(t)y^2+B_3(t)y^3, \tag{2}$$

e incluso una ecuación de Abel generalizada [36]

$$\dot{x} = \sum_{k=0}^{n} A_k(t)\,x^k, \qquad A_n(t) \neq 0. \tag{3}$$

Otra ecuación que se ha mostrado de interés más recientemente es la ecuación de Abel de segundo orden

$$\ddot{x}+4kx^2\dot{x}+k^2x^5 = 0\,, \tag{4}$$

o más generalmente la ecuación de Abel de orden n, que es una combinación lineal de los diferentes miembros de una jerarquía de ecuaciones de Abel de orden superior con coeficientes $p_i = p_i(t)$,

$$(p_0\mathbb{D}_A^n + p_1\mathbb{D}_A^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\mathbb{D}_A + p_n)x + p_{n+1} = 0\,, \tag{5}$$

en donde $\mathbb{D}_A$ denota el operador diferencial

$$\mathbb{D}_A = \frac{d}{dt} + kx^2\,, \tag{6}$$

de forma que la acción de $\mathbb{D}_A$ lleva a una familia de ecuaciones difenciales dependientes del parámetro k cuyos primeros términos son los de la sucesión

$$\mathbb{D}_A^j x = 0.$$

Más explícitamente, $\mathbb{D}_A^0 x = x$, mientras que

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_A x &= \left(\frac{d}{dt}+kx^2\right)x = \dot{x}+kx^3,\\
\mathbb{D}_A^2 x &= \left(\frac{d}{dt}+kx^2\right)^2 x = \ddot{x}+4kx^2\dot{x}+k^2x^5,\\
\mathbb{D}_A^3 x &= \left(\frac{d}{dt}+kx^2\right)^3 x = \dddot{x}+5kx^2\ddot{x}+8kx\dot{x}^2+9k^2x^4\dot{x}+k^3x^7,\\
\mathbb{D}_A^4 x &= \left(\frac{d}{dt}+kx^2\right)^4 x = x^{(iv)}+2k(4\dot{x}^3+13x\dot{x}\ddot{x}+3x^2\,\dddot{x})+2k^2x^3(22\dot{x}^2+7x\dot{x})\\
&\qquad +16k^3x^6\dot{x}+k^4x^9.
\end{aligned}$$

El estudio de estas ecuaciones de Abel está motivado por el hecho de que a menudo aparecen en procesos de reducción de orden desde ecuaciones de orden superior, y por consiguiente juegan un papel importante en el proceso de modelado de problemas en muy diversas áreas. Algunos ejemplos concretos son:

- La ecuación de Lane–Emden: $\ddot{x}+(2/t)\dot{x}+x^n = 0$.
- La ecuación de Emden–Fowler: $\ddot{x} = A\,t^n\,x^m\,\dot{x}^l$.
- La ecuación de Duffing: $\ddot{x}+ax+bx^3 = 0$.

También desempeñan un papel relevante en el estudio de sistemas cuadráticos en el plano y los problemas de centro-foco [3]. Además, fueron usadas por Majorana en el estudio de la ecuación de Thomas-Fermi [38]:

$$\ddot{x} = x^{3/2}t^{-1/2},$$

y este tipo de ecuaciones han sido usadas en modelos cosmológicos. Por ejemplo, la solución general de las ecuaciones cosmológicas de Einstein–Friedmann para un universo con un campo escalar para un potencial dado pueden expresarse mediante la solución general de una ecuación de Abel de primera clase [40]. Más recientemente han aparecido en el estudio de $U(1)$-membranas [41].

2. Integrabilidad mediante cuadraturas y reglas de superposición

La ecuación diferencial más simple posible, $\dot{x} = c_0(t)$, admite solución mediante una cuadratura

$$x(t) = \int^t c_0(t')\,dt',$$

y, además, una regla de superposición, $\phi(x;k) = x + k$, que nos permite escribir su solución general si conocemos una solución particular, $x(t) = \phi(x_1(t);k)$: $x(t) = x_1(t) + k$.

Análogamente, la ecuación diferencial lineal homogénea, $\dot{x} = c_1(t)x$, también admite solución mediante una cuadratura, $x(t) = x_0 \exp\left(\int^t c_1(t')\,dt'\right)$ y existe una una regla de superposición, $\phi(x;k) = kx$, de forma que si $x_1(t)$ es una solución particular no nula, su solución general está dada por $x(t) = \phi(x_1(t);k) = kx_1(t)$.

Por su parte la ecuación diferencial lineal inhomogénea $\dot{x} = c_0(t) + c_1(t)x$, con $c_0(t) \neq 0$, admite una solución mediante dos cuadraturas,

$$x(t) = \exp\left(\int^t c_1(t')\,dt'\right)\left[C + \int^t \exp\left(-\int^{t'} c_1(t'')\,dt''\right) c_0(t')\,dt'\right],$$

así como una regla de superposición, $\phi(x_1,x_2;k) = x_1 + k(x_2 - x_1)$, de manera que si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son dos soluciones particulares genéricas, la solución general es $x(t) = \phi(x_1(t),x_2(t);k) = x_1(t) + k(x_2(t) - x_1(t))$.

Como ya mencionamos anteriormente, otro ejemplo relevante es el de la ecuación de Riccati

$$\dot{x} = c_0(t) + c_1(t)x + c_2(t)x^2, \tag{7}$$

que es una generalización sencilla de la ecuación diferencial lineal inhomogénea: esta no es sino el caso particular $c_2(t) \equiv 0$. Este tipo de ecuaciones no admiten, en general, solución mediante cuadraturas, pero, sin embargo, es bien conocido que admite una regla de superposición (no lineal):

$$\phi(x_1,x_2,x_3;k) = \frac{kx_1(x_3 - x_2) + x_2(x_1 - x_3)}{k(x_3 - x_2) + (x_1 - x_3)},$$

de forma que si $x_1(t), x_2(t)$ y $x_3(t)$ son tres soluciones particulares diferentes, la solución general viene dada por

$$x(t) = \phi(x_1(t),x_2(t),x_3(t);k) = \frac{kx_1(t)(x_3(t) - x_2(t)) + x_2(t)(x_1(t) - x_3(t))}{k(x_3(t) - x_2(t)) + (x_1(t) - x_3(t))},$$

donde k toma cualquier valor real o puede hacerse tender a infinito.

Nótese que las soluciones de la ecuación de Riccati son las curvas integrales del campo vectorial dependiente de t en $\mathbb{R}$ dado por $X_t = c_0(t)X_0 + c_1(t)X_1 + c_2(t)X_2$, donde, X_1, X_2, X_3 son los campos vectoriales sobre $\mathbb{R}$ de la forma

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_1 = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x^2\frac{\partial}{\partial x}.$$

Dichos campos vectoriales generan un álgebra de Lie V real de dimensión tres con relaciones de conmutación

$$[X_0,X_1] = X_0, \quad [X_0,X_2] = 2X_1, \quad [X_1,X_2] = X_2,$$

i.e. isomorfa al álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Este es precisamente el motivo de la existencia de la mencionada regla de superposición, según establece el Teorema de Lie–Scheffers (véase [5], [6], [11], [30], [39]).

Debemos indicar que los campos vectoriales X_0, X_1 y X_2 forman una base de los campos vectoriales fundamentales relativos a la acción del grupo de Lie $SL(2,\mathbb{R})$ sobre $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{\infty\}$:

$$\Theta(A,x) = \begin{cases} \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} & x \notin \{-\frac{\delta}{\gamma},\infty\}, \\ \frac{\alpha}{\gamma} & x = \infty, \\ \infty & x = -\frac{\delta}{\gamma}, \end{cases} \qquad \text{donde } A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}).$$

Ya que cada ecuación de Riccati está determinada por X_t, el cual describe una curva en V, es evidente que cada ecuación de Riccati se puede asociar con la curva en $\mathbb{R}^3$ cuyas componentes se corresponden a las coordenadas de X_t en la base X_1, X_2, X_3. Por otro lado, el grupo $\mathscr{G} = \mathrm{Map}(\mathbb{R}, SL(2,\mathbb{R}))$ de curvas en $SL(2,\mathbb{R})$ transforma cada curva $x(t)$ en $\overline{\mathbb{R}}$ que es solución de (7) en otra curva $\bar{x}(t) = \Theta(A(t),x(t))$ en $\overline{\mathbb{R}}$ que satisface una nueva ecuación de Riccati con unos coeficientes $\bar{c}_2(t)$, $\bar{c}_1(t)$, $\bar{c}_0(t)$ dados por:

$$\begin{aligned} \bar{c}_2 &= \delta^2 c_2 - \delta\gamma c_1 + \gamma^2 c_0 + \gamma\dot{\delta} - \delta\dot{\gamma}, \\ \bar{c}_1 &= -2\beta\delta c_2 + (\alpha\delta+\beta\gamma) c_1 - 2\alpha\gamma c_0 + \delta\dot{\alpha} - \alpha\dot{\delta} + \beta\dot{\gamma} - \gamma\dot{\beta}, \\ \bar{c}_0 &= \beta^2 c_2 - \alpha\beta c_1 + \alpha^2 c_0 + \alpha\dot{\beta} - \beta\dot{\alpha}. \end{aligned}$$

Definimos de esta manera una acción afín del grupo de Lie $\mathscr{G}$ sobre el conjunto de todas las ecuaciones de Riccati, de manera que partiendo de una ecuación de Riccati, posiblemente podemos transformarla mediante una elección apropiada de la matriz A para que la nueva ecuación resultante sea más sencilla, por ejemplo integrable mediante cuadraturas. Las condiciones para la posible existencia de una tal elección son las que nos proporcionan condiciones de integrabilidad [9].

3. La ecuación de Abel de primer orden

Recibe el nombre de ecuación de Abel de primer orden de primera clase la ecuación diferencial (1), que es una generalización tanto de la de Riccati (el caso particular $A_3 = 0$) como de la de Bernoulli para $n = 3$ (donde $A_2 = A_0 = 0$). Esta ecuación no es, en general, integrable mediante cuadraturas (como sucedía en el caso de la ecuación de Riccati), aunque existen casos particulares para los que sí es posible expresar la solución general mediante cuadraturas [16], [17].

Por otra parte, la que se llama ecuación de Abel de primer orden de segunda clase es la (2), que puede reducirse a una de las de primera clase mediante la transformación

$$x = (y+f(t))^{-1}, \tag{8}$$

que en efecto transforma una en otra en la que los coeficientes están relacionados por:

$$\begin{aligned} A_0 &= -B_3, \\ A_1 &= 3B_3 f - B_2, \\ A_2 &= -\dot{f} - 3B_3 f^2 + 2f B_2 - B_1, \\ A_3 &= f^3 B_3 - f^2 B_2 + f B_1 - B_0. \end{aligned} \tag{9}$$

Podemos, por consiguiente, restringirnos al estudio de las de primera clase.

Comparando (1) con (7) se observa que el campo vectorial dependiente de t cuyas curvas integrales son las soluciones de (1) es también una combinación lineal con coeficientes que dependen de t de campos vectoriales del espacio lineal

$$V_{\mathrm{Abel}}(\mathbb{R}) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial x}, x^2\frac{\partial}{\partial x}, x^3\frac{\partial}{\partial x} \right\rangle.$$

Notemos que

$$\left[x^2\frac{\partial}{\partial x}, x^3\frac{\partial}{\partial x}\right] = x^4\frac{\partial}{\partial x},$$

y en consecuencia (1) no es, en general, un sistema de Lie ya que $V_{\mathrm{Abel}}(\mathbb{R})$ no es un álgebra de Lie real. Es más, ni siquiera está contenida en un álgebra de Lie real de dimensión finita.

Podemos, sin embargo, tratar de determinar un cierto subespacio lineal $W(\mathbb{R}) \subset V_{\mathrm{Abel}}(\mathbb{R})$ de forma que $W(\mathbb{R})$ sea un álgebra de Lie tal que $[W(\mathbb{R}), V_{\mathrm{Abel}}(\mathbb{R})] \subset V_{\mathrm{Abel}}(\mathbb{R})$. Si así fuese, los flujos de los campos vectoriales en $W(\mathbb{R})$ dejarían invariante al subespacio lineal $V_{\mathrm{Abel}}(\mathbb{R})$. De este modo, si partimos de una ecuación de Abel se obtendrá a partir de cada curva con valores en el subgrupo correspondiente a $W(\mathbb{R})$ una nueva ecuación de Abel que, mediante una elección apropriada de tal curva, permita transformar el campo original en una combinación lineal con coeficientes dependientes de t de campos vectoriales pertenecientes a un álgebra de Lie contenida en $V_{\mathrm{Abel}}(\mathbb{R})$, que es el caso de los sistemas de cuasi-Lie (véase [4]).

En el caso de la ecuación (1) debemos analizar los campos vectoriales sobre $\mathbb{R}$, esto es, de la forma $Y = f(x)\,\partial/\partial x$, y determinar los posibles valores de la función f para que, en primer lugar,

$$\left[Y, \frac{\partial}{\partial x}\right] = -\frac{df}{dx}\frac{\partial}{\partial x} \in V_{\mathrm{Abel}}(\mathbb{R}),$$

lo que se traduce en $-df/dx = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ para ciertas constantes reales $c_0, \dots, c_3$. Por tanto, $f = -\frac{c_3}{4}x^4 - \frac{c_2}{3}x^3 - \frac{c_1}{2}x^2 - c_0x - c_{-1}$, donde c_{-1} es una constante real arbitraria. Cuando imponemos además la condición

$$\left[Y, x\frac{\partial}{\partial x}\right] = \left(f - x\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial}{\partial x} \in V_{\mathrm{Abel}}(\mathbb{R}),$$

obtenemos que $c_3 = 0$, y de la condición adicional

$$\left[Y, x^2\frac{\partial}{\partial x}\right] = \left(2xf - x^2\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial}{\partial x} \in V_{\mathrm{Abel}}(\mathbb{R})$$

se deduce que $c_2 = 0$. Finalmente, ya que Y satisface

$$\left[Y, x^3\frac{\partial}{\partial x}\right] = \left(3x^2f - x^3\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial}{\partial x} \in V_{\mathrm{Abel}}(\mathbb{R}),$$

encontramos que $c_1 = 0$. Todo esto se resume diciendo que el grupo de invariancia de $V_{\mathrm{Abel}}(\mathbb{R})$ de las ecuaciones de Abel es el que tiene como álgebra de Lie

$$W_{\mathrm{Abel}}(\mathbb{R}) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial x} \right\rangle.$$

Dicho grupo no es sino el grupo afín en una dimensión. Por tanto, el conjunto de las ecuaciones de Abel de primer orden de primera clase es invariante bajo todas las transformaciones de la forma:

$$x(t) = \alpha(t)\bar{x}(t) + \beta(t), \qquad \alpha(t) \neq 0. \tag{10}$$

Bajo una tal transformación, (1) se transforma en una nueva ecuación de Abel $\dot{\bar{x}} = \bar{A}_0(t) + \bar{A}_1(t)\bar{x} + \bar{A}_2(t)\bar{x}^2 + \bar{A}_3(t)\bar{x}^3$ cuyos coeficientes son:

$$\begin{cases} \bar{A}_3(t) = A_3(t)\alpha^2(t), \\ \bar{A}_2(t) = \alpha(t)(3A_3(t)\beta(t) + A_2(t)), \\ \bar{A}_1(t) = 3A_3(t)\beta^2(t) + 2A_2(t)\beta(t) + A_1(t) - \dfrac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)}, \\ \bar{A}_0(t) = \dfrac{1}{\alpha(t)}\left(A_3(t)\beta^3(t) + A_2(t)\beta^2(t) + A_1(t)\beta(t) + A_0(t) - \dot{\beta}(t)\right). \end{cases}$$

Esta última propiedad es de una gran utilidad, ya que la acción del mencionado grupo de curvas en el grupo afín produce órbitas, es decir clases de equivalencia, cuyos elementos tienen las mismas propiedades de integrabilidad y de existencia de reglas de superposición de soluciones [12]. Dichas órbitas están caracterizadas por los diferentes posibles valores de algunas funciones invariantes [16], [17], [31].

Más explícitamente, si conocemos la transformación que conecta un sistema de una cierta órbita con un sistema de Lie dentro de la misma órbita con un principio de superposición conocido, entonces podemos determinar un principio de superposición dependiente del tiempo para nuestro sistema [4].

Es obvio a partir de lo anterior la relevancia de determinar las álgebras de Lie contenidas en $V_{\rm Abel}(\mathbb{R})$ y cuyos elementos se pueden alcanzar mediante la acción del mencionado grupo de transformaciones (obsérvese que el coeficiente de X_3 no puede hacerse cero mediante una tal transformación). Dicho problema fue tratado en [12]. Resumiendo los resultados allí mostrados, uno puede comprobar que:

i) La única subálgebra de Lie de dimensión tres es la correspondiente a la ecuación de Riccati, la cual no es accesible, según ya hemos indicado, puesto que el coeficiente de X_3 debe ser no nulo.

ii) Existe una familia uniparamétrica de subálgebras de $V^{\mu}_{\rm Abel}(\mathbb{R})$ de dimensión dos que se pueden alcanzar desde una ecuación de Abel propia, es decir, con $A_3 \neq 0$, y que está generada por

$$(-2\mu^3 + 3\mu x^2 + x^3)\frac{\partial}{\partial x}, \qquad (\mu + x)\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

Obviamente las ecuaciones correspondientes a los elementos de dichas subálgebras de Lie son integrables mediante dos cuadraturas. Nótese que el caso $\mu = 0$ corresponde a una ecuación de Bernoulli.

iii) Las subálgebras de Lie unidimensionales generadas por vectores

$$(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + x^3)\frac{\partial}{\partial x}$$

dan lugar a ecuaciones diferenciables separables, y son, por tanto, integrables mediante cuadraturas.

4. La ecuación generalizada de Abel de primera clase

Tras explicar en el apartado anterior los rudimentos de nuestro método mediante el estudio de la ecuación de Abel, pasemos ahora a aplicarlo al ámbito de las ecuaciones generalizadas de Abel de primera clase, es decir, a las ecuaciones de la forma (3). En este apartado nos centraremos en el caso $n \geq 3$. Para $n = 3$ se comprueba fácilmente que se recuperan varios de los resultados descritos en el apartado anterior.

Nótese que las ecuaciones (3) describen las curvas integrales de un campo vectorial dependiente del tiempo de la forma

$$X_t = \sum_{k=0}^{n} A_k(t) X_k, \qquad A_n(t) \neq 0, \tag{11}$$

donde

$$X_k = x^k \frac{\partial}{\partial x}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Por tanto, X_t toma valores en el espacio vectorial

$$V_{\mathrm{GAbel}}(\mathbb{R}) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial x}, \ldots, x^n \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle.$$

Teniendo en cuenta que

$$\left[x^2 \frac{\partial}{\partial x}, x^n \frac{\partial}{\partial x} \right] = (n-2) x^{n+1} \frac{\partial}{\partial x},$$

se deduce que el espacio vectorial $V_{\mathrm{GAbel}}(\mathbb{R})$ no es un álgebra de Lie real y no está contenido en ninguna álgebra de Lie real de dimensión finita.

Como en el apartado anterior, tratemos de determinar un cierto subespacio lineal $W(\mathbb{R}) \subset V_{\mathrm{GAbel}}(\mathbb{R})$ de forma que $W(\mathbb{R})$ sea un álgebra de Lie tal que $[W(\mathbb{R}), V_{\mathrm{GAbel}}(\mathbb{R})] \subset V_{\mathrm{GAbel}}(\mathbb{R})$. Esto es, debemos buscar los campos vectoriales Y sobre $\mathbb{R}$ tales que $[Y, Z] \in V_{\mathrm{GAbel}}(\mathbb{R})$ para todo $Z \in V_{\mathrm{GAbel}}(\mathbb{R})$. Escribiendo $Y = f(x)\partial/\partial x$, se debe cumplir que

$$\left[Y, \frac{\partial}{\partial x} \right] = -\frac{df}{dx}\frac{\partial}{\partial x} \in V_{\mathrm{GAbel}}(\mathbb{R}),$$

lo que se traduce en que

$$\frac{df}{dx} = -\sum_{k=0}^{n} c_k x^k \Longrightarrow f = -\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} - c_{-1},$$

para ciertas constantes reales $c_0, \ldots, c_n$. Es más, ya que

$$\left[Y, x^n \frac{\partial}{\partial x} \right] = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1-n)c_k}{k+1} x^{n+k} - c_{-1} n x^{n-1} \right) \frac{\partial}{\partial x} \in V_{\mathrm{GAbel}}(\mathbb{R}),$$

se tiene que $c_k = 0$ para $k > 0$, de donde $f = -c_0 x - c_{-1}$ para ciertas constantes c_0 y c_{-1}. Una vez probado esto, es fácil comprobar que todo campo vectorial de la forma $Y = (c_{-1} + c_0 x)\partial/\partial x$ cumple la condición requerida, es decir, $[Y, Z] \in V_{\mathrm{GAbel}}(\mathbb{R})$ para todo $Z \in V_{\mathrm{GAbel}}(\mathbb{R})$. Por tanto, el grupo de invariancia del conjunto $V_{\mathrm{GAbel}}(\mathbb{R})$ de las ecuaciones generalizadas de Abel (con $n \geq 3$) es

$$W_{\mathrm{GAbel}}(\mathbb{R}) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial x} \right\rangle.$$

Una vez más, el conjunto de las ecuaciones generalizadas de Abel de primera clase es invariante bajo todos los cambios de variables de la forma (10). Bajo una tal transformación, (3) se transforma en una nueva ecuación generalizada de Abel $\dot{\bar{x}} = \sum_{k=0}^{n} \bar{A}_k(t) \bar{x}^k$ con $\bar{A}_n(t) = \alpha^{n-1}(t) A_n(t)$. En otras palabras, el orden (esto es, la mayor potencia de x de coeficiente no nulo) de una ecuación generalizada de Abel no puede variarse mediante elementos del grupo de transformaciones.

Todo campo vectorial $X \in V_{\mathrm{GAbel}}(\mathbb{R})$ tiene la forma $X = P\partial/\partial x$, donde $P = P(x)$ es un polinomio de coeficientes reales y grado p. Por simplicidad, denotaremos $\mathrm{gr}\, X = p$. Si además P es mónico diremos, con un ligero abuso de notación, que X es mónico. Por último, es relevante además destacar que si $\mathrm{gr}\, X_1 \neq \mathrm{gr}\, X_2$ entonces $\mathrm{gr}[X_1, X_2] = \mathrm{gr}\, X_1 + \mathrm{gr}\, X_2 - 1$.

Pasemos ahora a determinar las subálgebras $W_0(\mathbb{R})$ de $V_{\mathrm{GAbel}}(\mathbb{R})$ que se pueden alcanzar mediante la acción un elemento del mencionado grupo de transformaciones en un campo vectorial de la forma (11). Evidentemente eso implica que cada $W_0(\mathbb{R})$ debe tener un elemento de grado n. Es un resultado conocido, debido a Lie [29], que todas las álgebras de Lie finito dimensionales de campos vectoriales sobre $\mathbb{R}$ son isomorfas a una subálgebra de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Esto nos deja tres posibilidades genéricas. La subálgebra $W_0(\mathbb{R})$ puede:

- ser isomorfa a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ y, por tanto, tener dimensión tres;
- ser isomorfa a $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ (el grupo afín sobre la recta real) y, en consecuencia, tener dimensión dos;
- o tener dimensión uno.

Analicemos ahora los casos anteriores más detenidamente. Comencemos por asumir que $W_0(\mathbb{R})$ tiene dimensión tres. En tal caso, es fácil de ver que existe una base, X_1, X_2, X_3, de $W_0(\mathbb{R})$ tal que

$$n = \mathrm{gr} X_1 > \mathrm{gr} X_2 > \mathrm{gr} X_3 \geq 0. \tag{12}$$

Como $\mathrm{gr}[X_1, X_2] = n + \mathrm{gr} X_2 - 1$, el campo vectorial $[X_1, X_2]$ pertenece a $W_0(\mathbb{R})$ si y solo si $\mathrm{gr} X_2 \leq 1$. Teniendo en cuenta las relaciones (12), se infiere que $\mathrm{gr} X_2 = 1$ y $\mathrm{gr} X_3 = 0$. De aquí se concluye que $\mathrm{gr}[X_1, X_3] = n - 1$ y que por tanto $\mathrm{gr}[X_1, [X_1, X_3]] = 2n - 2$. Para que este elemento pertenezca a $W_0(\mathbb{R})$ debe ser $n \leq 2$. En otras palabras, no existen álgebras de Lie de dimensión tres de campos vectoriales con coeficientes polinómicos cuyos elementos se puedan conectar con un campo de la forma (11) para $n > 2$.

Estudiemos ahora el caso en el que $W_0(\mathbb{R})$ tiene dimensión dos, es decir, $W_0(\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$. Toda álgebra de Lie no abeliana de dimensión dos tiene una base X_1, X_2 tal que $[X_1, X_2] = X_1$. Obviamente, podemos siempre escoger que X_1 sea mónico y que los grados de X_1 y X_2 sean distintos. En este caso, el grado de $[X_1, X_2]$ es $\mathrm{gr} X_1 + \mathrm{gr} X_2 - 1$. Entonces, si $[X_1, X_2] = X_1$ debe ser $\mathrm{gr} X_1 = n$ y $\mathrm{gr} X_2 = 1$.

Partiendo del resultado anterior, escribimos X_1 y X_2 de la forma

$$X_1 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \frac{\partial}{\partial x}, \qquad a_n = 1,$$
$$X_2 = (b_0 + b_1 x)\frac{\partial}{\partial x},$$

e imponemos la condición $[X_1, X_2] = X_1$. Un simple cálculo nos muestra que

$$b_1 \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - (b_0 + b_1 x) \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \Rightarrow (b_1 - 1) \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - (b_0 + b_1 x) \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = 0.$$

Por lo tanto,

$$(b_1 - 1) \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - b_0 \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k - b_1 \sum_{k=1}^{n} k a_k x^k = 0,$$

y

$$(b_1 - 1 - n b_1) x^n + (b_1 - 1) a_0 - b_0 a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} [((1-k) b_1 - 1) a_k - b_0 (k+1) a_{k+1}] x^k = 0.$$

Agrupando los coeficientes con igual exponente, se obtiene que $b_1 - 1 - n b_1 = 0$, de donde $b_1 = 1/(1-n)$ y

$$a_k = \frac{b_0 (k+1)(1-n)}{n-k} a_{k+1}, \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$

Tras un corto cálculo, se encuentra que

$$a_k = \frac{[b_0(1-n)]^{n-k} n(n-1)\cdots(k+1)}{(n-k)(n-k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{[b_0(1-n)]^{n-k} n!}{k!(n-k)!} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} [b_0(1-n)]^{n-k}.$$

Por lo que finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} X_1 &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \frac{\partial}{\partial x} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} [b_0(1-n)]^{n-k} x^k \frac{\partial}{\partial x} = [b_0(1-n)+x]^n \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_2 &= (b_0 + b_1 x)\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{1-n}[b_0(1-n)+x]\frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned} \tag{13}$$

De esta forma, para cada posible valor de la constante b_0 todos los a_k están determinados. Por ejemplo, para el caso particular $n = 3$, se obtiene que $b_1 = -1/2$ y, tomando $b_0 = -\mu/2$, se tiene que

$$X_1 = (\mu^3 + 3\mu^2 x + 3\mu x^2 + x^3)\frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = -\frac{1}{2}(\mu + x)\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \mu \in \mathbb{R},$$

es decir, la misma subálgebra de Lie construida en [12] y mencionada en el apartado anterior. También es destacable que para $\mu = 0$ la ecuación relacionada con el campo $X = a(t)X_1 + b(t)X_2$ es una ecuación de Bernoulli con término no lineal de grado n.

Finalmente, las álgebras de Lie unidimensionales son de la forma

$$W_0(\mathbb{R}) = \left\langle \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle,$$

para constantes reales, $c_0, \ldots, c_{n-1}$ cualesquiera y $c_n \neq 0$.

5. Formas canónicas de ecuaciones de Abel de primer orden de primera clase

Partiendo de una ecuación de Abel de primer orden de primera clase con $A_3 \neq 0$, podemos definir una transformación

$$\bar{x} = x + \frac{A_2(t)}{3A_3(t)},$$

que reduce la ecuación original (1) a

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}_0(t) + \bar{A}_1(t)\bar{x} + \bar{A}_3(t)\bar{x}^3.$$

Si $\bar{A}_0 = 0$, obtenemos una primera posibilidad de forma canónica,

$$\dot{x} = A_1(t)x + A_3(t)x^3. \tag{14}$$

Si por el contrario $\bar{A}_0 \neq 0$, podemos llevar a cabo una nueva transformación

$$\bar{x} = \bar{\bar{x}}\bar{A}_0,$$

con lo que la ecuación se transforma en $\dot{\bar{\bar{x}}} = \bar{\bar{A}}_3(t)\bar{\bar{x}}^3 + \bar{\bar{A}}_1(t)\bar{\bar{x}} + 1$, y obtenemos una segunda posible forma canónica

$$\dot{x} = 1 + A_1(t)x + A_3(t)x^3. \tag{15}$$

Liouville [31] demostró que si definimos las funciones Φ_3 y Φ_5 mediante

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= \dot{A}_2 A_3 - A_2 \dot{A}_3 + 3A_0 A_3^2 - A_1 A_2 A_3 + \frac{2}{9}A_2^3, \\ \Phi_5 &= A_3 \dot{\Phi}_3 - 3\left(\dot{A}_3 - \frac{1}{3}A_2^2 + A_1 A_3\right)\Phi_3, \end{aligned}$$

entonces el cociente Φ_3^5/Φ_5^3 es una función invariante bajo la acción del mencionado grupo de invariancia del conjunto de ecuaciones de Abel.

La primera de las mencionadas formas canónicas corresponde a $\Phi_3 = 0$. Dos ecuaciones cualesquiera para las que $\Phi_3 = 0$ están en la misma órbita, i.e. están relacionadas por un elemento del grupo de invariancia.

Para las ecuaciones correspondientes a la segunda forma canónica, existe una nueva función invariante, de forma que dos ecuaciones están en la misma órbita si el par de valores de ambos invariantes es el mismo para las dos ecuaciones.

6. La ecuación de Riccati como reducción de una lineal inhomogénea

En 1720 Riccati propuso la ecuación que hoy lleva su nombre. Estaba interesado en el siguiente problema. Dado un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneo que describe la evolución dinámica de un punto (x_1,x_2) del plano euclídeo,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

donde los b_{ij} son funciones dependientes de t, encontrar la evolución dinámica del cociente $x = x_2/x_1$. La respuesta que obtuvo es que dicha ecuación es

$$\dot{x} = c_0(t) + c_1(t)x + c_2(t)x^2,$$

en donde los coeficientes c_i son:

$$c_0 = b_{21}, \qquad c_1 = b_{22} - b_{11}, \qquad c_2 = -b_{12}.$$

Desde el punto de vista pasivo, este proceso corresponde a elegir unas nuevas coordenadas (x,y) tales que $x = x_2/x_1$ e $y = x_1$. Obsérvese que la linealidad del sistema implica que es invariante bajo los elementos del grupo de transformaciones correspondiente al campo vectorial

$$Y = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2},$$

y que las nuevas coordenadas adaptadas a dicha simetría son tales que

$$Yx = 0, \quad Yy = y,$$

por lo que

$$Y = y\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z},$$

con $y = e^z$.

Si lo que consideramos es una ecuación diferencial de segundo orden,

$$\ddot{u} + d_0\,\dot{u} + d_1\,u = 0, \tag{16}$$

que, como sabemos, puede reescribirse como

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -d_1 & -d_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

vemos que el cociente $\zeta = v/u$ satisface la ecuación de Riccati

$$\dot{\zeta} = -\zeta^2 - d_0\,\zeta - d_1. \tag{17}$$

Por consiguiente, podemos asociar las ecuaciones de Riccati con ecuaciones lineales de segundo orden. En particular, para $d_0 = d_1 = 0$ obtenemos como ecuación reducida

$$\dot{\zeta} + \zeta^2 = 0.$$

Debemos destacar, como anteriormente hicimos con los sistemas lineales homogéneos, que las ecuaciones lineales homogéneas que estamos considerando son invariantes bajo dilataciones $u \mapsto \lambda\, u$, y el generador infinitesimal de dichas transformaciones es el campo vectorial de Liouville

$$\Delta = u\,\frac{\partial}{\partial u}.$$

La receta establecida por Lie para la reducción de orden de sistemas con simetría consiste en cambiar la variable dependiente a una nueva variable w de forma que $\Delta = \partial/\partial w$. Más concretamente, en nuestro caso $u = e^w$, y bajo tal cambio de variable

$$\dot u = e^w\,\dot w\,, \qquad \ddot u = e^w(\dot w^2 + \ddot w)\,,$$

la nueva ecuación es una ecuación de Riccati para la función $\dot w = \dot u/u$:

$$\ddot w + \dot w^2 + d_0\,\dot w + d_1 = 0\,.$$

7. Ecuaciones de Riccati de orden superior

Denominamos ecuaciones de Riccati de orden superior a las que aparecen en un proceso de reducción similar por invariancia bajo dilataciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden superior.

Por reducción de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden $(j+1)$, como por ejemplo $y^{(j+1)} = 0$, obtendremos una ecuación de Riccati de orden j. Así, la invariancia bajo dilataciones de la ecuación diferencial $y^{(n)} = 0$, de acuerdo con la receta de reducción propuesta por Lie, sugiere buscar una nueva variable z tal que el campo generador de dilataciones, $y\,\partial/\partial y$, se escriba en las nuevas coordenadas como $\partial/\partial z$. Es decir, $y = e^z$, salvo un factor, que es irrelevante.

Utilizando el método de inducción completa, se puede probar que si $n > 1$ la ecuación diferencial $y^{(n)} = 0$ se reduce a $R^{(n-1)}(x) = 0$, en donde $R^{(j)}(x)$ se define de forma iterativa mediante la relación

$$R^{(j)}(x,\ldots,x^{(j)}) = \mathbb{D}^j x\,, \quad j = 0,1,\ldots,$$

y, por consiguiente, $R^{(j)} = \mathbb{D}R^{(j-1)}$, con

$$\mathbb{D} = \frac{d}{dt} + x\,, \qquad \text{donde} \qquad x = \dot z\,.$$

Con el cambio de variable $y = e^z$, si recordamos que $e^{-z}De^z = D + x \Longleftrightarrow De^z = e^z(D + x)$, con $D = d/dt$, podemos comprobar que $y^{(n)} = e^z R^{(n-1)}(x)$. En efecto, la propiedad es obviamente cierta para $n = 1$, puesto que $\dot y = \dot z e^z = e^z x = e^z R^{(0)}(x)$. Además, si suponemos cierta la propiedad hasta un cierto valor $n = k$, i.e. $y^{(k)} = e^z R^{(k-1)}(x)$, entonces también es cierta para $n = k+1$, puesto que

$$D^{k+1}y = D(y^{(k)}) = D(e^z R^{(k-1)}(x)) = e^z(D+x)R^{(k-1)}(x) = e^z R^{(k)}(x).$$

Por lo tanto, la receta propuesta por Lie, aplicada a $y^{(n)} = 0$, transforma tal ecuación en $R^{(n-1)}(x) = 0$ y la ecuación más general de Riccati de orden n puede obtenerse como reducción de una combinación lineal $\displaystyle\sum_{j=0}^{n+1} a_j(t)y^{(j)}$, que da lugar a

$$a_0(t) + \sum_{j=0}^{n} a_{j+1}(t)\,R^{(j)}(x,\ldots,x^{(j)}) = 0.$$

8. La sucesión de ecuaciones de Riccati

El operador diferencial $\mathbb{D}$ permite definir una sucesión de ecuaciones diferenciales mediante aplicación iterada de dicho operador a la función x [7]:

$$
\begin{aligned}
&n=0 \qquad \mathbb{D}^0 x = x,\\
&n=1 \qquad \mathbb{D}x = \left(\frac{d}{dt}+x\right)x = \dot x + x^2,\\
&n=2 \qquad \mathbb{D}^2 x = \left(\frac{d}{dt}+x\right)^2 x = \ddot x + 3x\dot x + x^3,\\
&n=3 \qquad \mathbb{D}^3 x = \left(\frac{d}{dt}+x\right)^3 x = \dddot x + 4x\ddot x + 6x^2\dot x + 3\dot x^2 + x^4,\\
&n=4 \qquad \mathbb{D}^4 x = \left(\frac{d}{dt}+x\right)^4 x = \ddddot x + 5x\dddot x + 10\dot x\ddot x + 15x\dot x^2 + 10x^2\ddot x + 10x^3\dot x + x^5,
\end{aligned}
$$

y análogas expresiones se obtendrán para valores mayores de n [24].

La ecuación

$$R^{(j)}(x,\ldots,x^{(j)}) = \mathbb{D}^j x = 0\,, \quad j=0,1,\ldots,n,$$

es una ecuación de Riccati de orden j. Observemos que $R^{(0)}(x)=x=0$ es la ecuación de Riccati de orden cero, por definición, mientras que $R^{(1)}(x)=0$ es la ecuación de Riccati con coeficientes constantes en su forma reducida

$$\dot x + x^2 = 0\,.$$

La ecuación de Riccati de segundo orden de esta cadena es la $R^{(2)}(x)=0$,

$$\ddot x + 3x\dot x + x^3 = 0\,, \tag{18}$$

recientemente estudiada en [10], [15].

Aunque tanto las ecuaciones de Riccati $R^{(3)}(x)=0$, $\dddot x + 4x\ddot x + 6x^2\dot x + 3\dot x^2 + x^4 = 0$, como la $R^{(4)}(x)=0$, $\ddddot x + 5x\dddot x + 10\dot x\ddot x + 15x\dot x^2 + 10x^2\ddot x + 10x^3\dot x + x^5 = 0$, comparten muchas de las propiedades de la correspondiente $R^{(2)}(x)=0$, no admiten una formulación lagrangiana, como veremos que sucede para $R^{(2)}(x)=0$.

Partiendo de la ecuación diferencial lineal homogénea de tercer orden

$$A_3(t)\,\dddot y + A_2(t)\,\ddot y + A_1(t)\,\dot y + A_0(t)\,y = 0,$$

en donde podemos suponer que $A_3(t)>0$, y efectuando el cambio de variable $y=e^u$, llegamos a la ecuación para $x=\dot u$:

$$A_3(\ddot x + 3x\dot x + x^3) + A_2(\dot x + x^2) + A_1 x + A_0 = 0,$$

y si cambiamos la variable independiente t a una nueva variable τ, entonces, como $d/dt = \dot\tau\, d/d\tau$, si utilizamos la notación $x' = dx/d\tau$, $x'' = d^2x/d\tau^2$, obtenemos

$$\dot x = \dot\tau\, x', \quad \ddot x = \dot\tau \frac{d}{d\tau}\left(\dot\tau\,\frac{dx}{d\tau}\right) = \dot\tau^2 x'' + \ddot\tau\, x',$$

por lo que la ecuación original se reduce a

$$A_3\left(\dot\tau^2 x'' + \ddot\tau x' + 3x\dot\tau x' + x^3\right) + A_2\left(\dot\tau x' + x^2\right) + A_1 x + A_0 = 0.$$

Si elegimos la función τ de forma tal que $A_3\,\dot\tau^2 = 1$, es decir, $\dot\tau = A_3^{-1/2}$, entonces

$$\ddot\tau = -\frac{1}{2}A_3^{-3/2}\dot A_3,$$

y en este caso la ecuación resultante es

$$x'' - \frac{1}{2}A_3^{-1}A_3'x' + 3A_3^{1/2}xx' + A_3x^3 + A_2A_3^{-1/2}x' + A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0,$$

que puede reescribirse en la forma:

$$\ddot{x} + (b_0(t) + b_1(t)x)\dot{x} + A_0(t) + A_1(t)x + A_2(t)x^2 + A_3(t)x^3 = 0, \tag{19}$$

con

$$b_1(t) = 3\sqrt{A_3(t)}, \qquad b_0(t) = \frac{A_2(t)}{\sqrt{A_3(t)}} - \frac{\dot{A}_3(t)}{2A_3(t)},$$

y es considerada como la forma más general de la ecuación de Riccati de segundo orden. Se ha demostrado recientemente en [15] que tal ecuación admite una formulación lagrangiana con un Lagrangiano de la forma:

$$L(t,x,v) = \frac{1}{v + U(t,x)},$$

donde $U(t,x) = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2$.

9. La ecuación de Riccati de segundo orden

Recordemos que una ecuación diferencial de segundo orden como por ejemplo

$$\ddot{x} = F(x,\dot{x})$$

tiene asociado un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = F(x,v) \end{cases}$$

cuyas soluciones son las curvas integrales del campo vectorial en $T\mathbb{R}$

$$\Gamma_F = v\frac{\partial}{\partial x} + F(x,v)\frac{\partial}{\partial v}.$$

En particular, para la ecuación de Riccati de segundo orden, $\ddot{x} + 3x\dot{x} + x^3 = 0$:

$$\Gamma^{(1)} = v\frac{\partial}{\partial x} - (3xv + x^3)\frac{\partial}{\partial v}. \tag{20}$$

Dicho sistema admite una formulación lagrangiana [15], siendo el Lagrangiano el dado por

$$L = \frac{1}{\dot{x} + x^2},$$

puesto que

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{2x}{(\dot{x}+x^2)^2}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -\frac{1}{(\dot{x}+x^2)^2},$$

por lo que tal L da lugar a la ecuación de Euler–Lagrange

$$-\frac{2x}{(\dot{x}+x^2)^2} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{(\dot{x}+x^2)^2}\right) = 2\frac{\ddot{x} + 2x\dot{x}}{(\dot{x}+x^2)^3} \Longrightarrow \frac{\ddot{x} + 3x\dot{x} + x^3}{(\dot{x}+x^2)^3} = 0.$$

Destaquemos el factor de proporcionalidad $(\dot{x}+x^2)^{-3}$ que aparece en la ecuación de Euler–Lagrange, cuyo significado encontraremos posteriormente.

En el tratamiento geométrico, partiendo del Lagrangiano

$$L_1(x,v) = \frac{1}{v + x^2},$$

obtenemos

$$\theta_{L_1} = \left(\frac{\partial L_1}{\partial v}\right) dx = -\frac{1}{(v+x^2)^2}\, dx = -{L_1}^2\, dx\,, \quad \omega_{L_1} = -d\theta_{L_1} = \frac{2\, dx \wedge dv}{(v+x^2)^3} = d{L_1}^2 \wedge dx\,,$$

mientras que la función energía es:

$$E_{L_1}(x,v) = v\,\frac{\partial L_1}{\partial v} - L_1 = \frac{-(2v+x^2)}{(v+x^2)^2}\,.$$

Es fácil comprobar que

$$\imath(\Gamma^{(1)})\omega_{L_1} = \frac{2}{(v+x^2)^3}[v dv + (3xv + x^3)dx] = dE_{L_1}\,,$$

como cabría esperar.

10. Ecuación de Abel de segundo orden

Recordemos que la ecuación de Riccati de primer orden podía obtenerse como reducción de una ecuación diferencial lineal de segundo orden (16) al tener en cuenta la invariancia bajo dilataciones, ya que entonces $\zeta = \dot{u}/u$ satisface la ecuación de Riccati (17), lo que nos llevaba a introducir el operador $\mathbb{D}$ y toda una cadena de ecuaciones de Riccati de orden superior.

De forma análoga al caso de la ecuación de Riccati, podemos definir el operador diferencial

$$\mathbb{D}_A = \frac{d}{dt} + kx^2\,,$$

y construir una sucesión de ecuaciones diferenciales dependiente del parámetro k mediante

$$\mathbb{D}_A^j x = 0.$$

o más explícitamente,

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_A^0 x &= x,\\
\mathbb{D}_A x &= \left(\frac{d}{dt} + kx^2\right)x = \dot{x} + kx^3,\\
\mathbb{D}_A^2 x &= \left(\frac{d}{dt} + kx^2\right)^2 x = \ddot{x} + 4kx^2\dot{x} + k^2x^5,\\
\mathbb{D}_A^3 x &= \left(\frac{d}{dt} + kx^2\right)^3 x = \dddot{x} + 5kx^2\ddot{x} + 8kx\dot{x}^2 + 9k^2x^4\dot{x} + k^3x^7,\\
\mathbb{D}_A^4 x &= \left(\frac{d}{dt} + kx^2\right)^4 x = x^{(iv)} + 2k(4\dot{x}^3 + 13x\dot{x}\ddot{x} + 3x^2\dddot{x}) + 2k^2x^3(22\dot{x}^2 + 7x\dot{x})\\
&\qquad + 16k^3x^6\dot{x} + k^4x^9.
\end{aligned}$$

Llamaremos a esta familia la *jerarquía de ecuaciones de Abel de orden superior*, pero obsérvese que no provienen de un proceso de reducción por simetría, sino simplememnte es construida por analogía con el caso correspondiente de Riccati. La forma más general de ecuación de Abel de orden n es precisamente una combinación lineal de los diferentes miembros de la jerarquía con coeficientes $p_i(t)$ [8]:

$$(p_0\mathbb{D}_A^n + p_1\mathbb{D}_A^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\mathbb{D}_A + p_n)x + p_{n+1} = 0\,.$$

La ecuación de Abel de segundo orden (4) puede escribirse como un sistema de dos ecuaciones de primer orden

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = -4kx^2v - k^2x^5 \end{cases}$$

que proporcionan las curvas integrales del campo vectorial en el espacio de fases de las velocidades $\mathbb{R}^2$

$$\Gamma^{(2)} = v\,\frac{\partial}{\partial x} + F_A\,\frac{\partial}{\partial v}\,, \qquad F_A = -4kx^2v - k^2x^5\,. \tag{21}$$

Tal ecuación de segundo orden admite una formulación lagrangiana, pero con un Lagrangiano no natural:

$$L_A = \frac{1}{(v+kx^3)^2}\,, \tag{22}$$

siendo la correspondiente función energía la dada por

$$E_{L_A} = -\,\frac{(3v+kx^3)}{(v+kx^3)^3}\,, \qquad \frac{d}{dt}E_{L_A} = 0\,.$$

Un hecho importante a destacar es que, como veremos posteriormente, existe un Lagrangiano alternativo dado por

$$\widetilde{L}_A = (3v+kx^3)^{2/3}.$$

11. Polinomios de Darboux y el método de los mutiplicadores de Jacobi

Cuando la dinámica está dada por un campo vectorial de tipo polinómico, como es el caso de las ecuaciones de segundo orden de Riccati y de Abel, se puede hacer uso de dos ingredientes importantes como son los mutiplicadores de Jacobi y los polinomios de Darboux. Mostraremos su utilidad mediante su aplicación a los casos de la ecuaciones de Riccati y de Abel de segundo orden.

Recordemos que si U es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, una función polinómica $\mathscr{D} : U \to \mathbb{R}$ se dice que es un *polinomio de Darboux* para un campo vectorial polinómico X si existe una función polinómica f definida en U tal que $X\mathscr{D} = f\mathscr{D}$. En este caso se dice que la función f es un *cofactor* relativo a dicho polinomio de Darboux, y al par $(f,\mathscr{D})$ se le llama *par de Darboux*.

Dados dos polinomios de Darboux para X, $\mathscr{D}_i : U_i \to \mathbb{R}$, $i = 1,2$, con cofactores f_1 y f_2 respectivamente, su producto $\mathscr{D}_1\mathscr{D}_2 : U_1 \cap U_2 \to \mathbb{R}$ es también un polinomio de Darboux con cofactor f_1+f_2. Por tanto, una potencia $\mathscr{D}^n$, $n \in \mathbb{N}$, de un polinomio de Darboux $\mathscr{D}$ con cofactor f es un polinomio de Darboux con cofactor nf. Más aún, para cualquier número entero p, $X\mathscr{D}^p = p\,f\,\mathscr{D}^p$, y además $X(\mathscr{D}_1/\mathscr{D}_2) = (f_1-f_2)(\mathscr{D}_1/\mathscr{D}_2)$.

Cuando $f = 0$, el correspondiente polinomio de Darboux es una integral primera. Diremos que $\mathscr{D}$ es un *polinomio de Darboux propio* cuando $f \neq 0$. Si $\mathscr{D}_1$ y $\mathscr{D}_2$ son polinomios de Darboux con el mismo cofactor, su cociente $\mathscr{D}_1/\mathscr{D}_2$ es una integral primera.

Dado un campo vectorial X en una variedad orientada (M,Ω), se llama *multiplicador de Jacobi* para X a toda función a R tal que $R\,i(X)\Omega$ sea cerrada. Recordemos que la divergencia del campo vectorial X (respecto de la forma de volumen Ω) está definida por la relación

$$\mathscr{L}_X\Omega = (\mathrm{div}X)\,\Omega\,.$$

Por tanto, R es un multiplicador de Jacobi si, y solo si, RX es un campo vectorial de divergencia nula y entonces

$$\mathscr{L}_{RX}\Omega = (\mathrm{div}RX)\,\Omega = [X(R) + R\,\mathrm{div}X]\,\Omega = 0\,,$$

por lo que vemos que R es un multiplicador de Jacobi para X si, y solo si,

$$X(R)+R\,\mathrm{div}X=0\,.$$

Más aún, fR es también un multiplicador de Jacobi para X si, y solo si, $Xf=0$, puesto que para cada función f,

$$X(fR)+fR\,\mathrm{div}X=(Xf)R+f(X(R)+R\,\mathrm{div}X).$$

La propiedad importante es que dado un campo vectorial polinómico, si $\mathscr{D}_1,\ldots,\mathscr{D}_k$, son polinomios de Darboux con sus correspondientes cofactores f_i, $i=1,\ldots,k$, podemos buscar multiplicadores de Jacobi para X que sean de la forma

$$R=\prod_{i=1}^{k}\mathscr{D}_i^{\nu_i}$$

y entonces, como

$$\frac{X(R)}{R}=\sum_{i=1}^{k}\nu_i\frac{X(\mathscr{D}_i)}{\mathscr{D}_i}=\sum_{i=1}^{k}\nu_i f_i\,,$$

vemos que si los coeficientes ν_i se pueden elegir de forma tal que se verifique

$$\sum_{i=1}^{k}\nu_i f_i=-\mathrm{div}X,$$

como

$$\frac{X(R)}{R}=\sum_{i=1}^{k}\nu_i f_i=-\mathrm{div}X\,,$$

vemos que R es un multiplicador de Jacobi para X.

Finalmente, debemos destacar que si R es un multiplicador de Jacobi para un campo vectorial X que corresponde a una ecuación diferencial de segundo orden, se puede probar que hay esencialmente una única (salvo adición de un término equivalente gauge a cero) función de Lagrange L tal que $R=\partial^2L/\partial v^2$.

En efecto, Helmholtz primero [26], y diversos autores posteriormente [20, 27, 32], analizaron el conjunto de condiciones, las llamadas *condiciones de Helmholtz*, que debe verificar una matriz $g_{ij}(x,\dot{x})$ para que dado un sistema de ecuaciones de segundo orden

$$\ddot{x}^j=F^j(x,\dot{x})\,,\quad j=1,2,\ldots,n,$$

el nuevo sistema

$$g_{ij}(\ddot{x}^j-F^j(x,\dot{x}))=0\,,\quad i,j=1,2,\ldots,n,$$

resulte ser el conjunto de las ecuaciones de Euler–Lagrange para cierta función Lagrangiano L. Dichas matrices g_{ij} pueden identificarse con la matriz Hessiano de L, $g_{ij}=\partial L/\partial v^i\partial v^j$, y entonces L puede obtenerse por integración de las funciones g_{ij}.

Entre los conjuntos de condiciones de Helmholtz, las dos primeras son regularidad y simetría de la función L, las del tercer conjunto relacionan entre sí las derivadas de g_{ij} y las de F^i, siendo el último conjunto de ecuaciones para g_{ij}

$$X(g_{ij})=g_{ik}A^k{}_j+g_{jk}A^k{}_i\,,$$

en donde

$$A^i{}_j=-\frac{1}{2}\frac{\partial F^i}{\partial v^j}\,,$$

y

$$X=v^i\frac{\partial}{\partial x^i}+F^i(x,v)\frac{\partial}{\partial v^i}$$

es el campo vectorial que describe las curvas integrales del sistema

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= v^i, \\ \frac{dv^i}{dt} &= F^i(x,v). \end{aligned}\right. \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Cuando el sistema es unidimensional ($i = j = k = 1$) los tres primeros conjuntos de condiciones son triviales y el cuarto se reduce a una sola ecuación en derivadas parciales,

$$X(g) + g\,\frac{\partial F}{\partial v} \equiv v\,\frac{\partial g}{\partial x} + F\,\frac{\partial g}{\partial v} + g\,\frac{\partial F}{\partial v} = 0\,,$$

que es precisamente la condición que define los multiplicadores de Jacobi, ya que en este caso $\operatorname{div} X = \partial F/\partial v$.

Por consiguiente, en el caso unidimensional la solución al problema inverso generalizado de la mecánica se reduce a encontrar la función g que es un multiplicador de Jacobi y entonces L se obtiene integrando la función g dos veces con respecto a las velocidades. La función L así obtenida para cada función g es única, salvo adición de un término equivalente gauge a cero.

Nótese también que encontramos así que si un sistema unidimensional admite dos Lagrangianos regulares esencialmente diferentes, entonces la función F tal que

$$\frac{\partial^2 L_1}{\partial v^2} = F\,\frac{\partial L_2}{\partial v^2}$$

es una constante del movimiento, un resultado redescubierto posteriormente por Currie y Saletan [19].

En el caso particular de la ecuación de Riccati de segundo orden, recordemos que la ecuación de segundo orden de la cadena de Riccati (18) tiene como sistema de ecuaciones de primer orden asociado al

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -3xv - x^3 \end{aligned}\right. ,$$

cuyas soluciones son las curvas integrales del campo vectorial

$$\Gamma^{(1)} = v\frac{\partial}{\partial x} - (3xv + x^3)\frac{\partial}{\partial v}\,. \tag{23}$$

Busquemos primero un polinomio de Darboux de la forma

$$\mathscr{D}(x,v) = v + ax^2,$$

para un cierto valor de la constante a. La condición $\Gamma^{(1)}\mathscr{D} = f\,\mathscr{D}$ implica, en primer lugar, que f debe ser de la forma $f(x,v) = (2a-3)x$, y entonces, $-x = af = (2a-3)ax$.

Vemos así que hay dos soluciones correspondientes a las raíces de la ecuación $2a^2 - 3a + 1 = 0$, i.e. o bien a es igual a 1 y el correspondiente cofactor es $f_1 = -x$, o bien $a = 1/2$ con cofactor asociado $f_{1/2} = -2x$.

En el primer caso, $\mathscr{D}_1(x,v) = v + x^2$, podemos elegir $\nu_1 = -3$ puesto que $\nu_1 f_1 = 3x = -\operatorname{div}\Gamma^{(1)}$, y por tanto, encontramos el multiplicador de Jacobi

$$R_1(x,v) = \frac{1}{(v+x^2)^3}.$$

En el segundo caso, $\mathscr{D}_2(x,v) = v + \frac{1}{2}x^2$, podemos elegir $\nu_2 = -\frac{3}{2}$ y entonces

$$R_2 = \left(v + \frac{1}{2}x^2\right)^{-3/2}.$$

es otro multiplicador de Jacobi.

Del primero de los multipicadores de Jacobi encontramos que el campo vectorial $\Gamma^{(1)}$ es el campo definido por un Lagrangiano L que es precisamente L_1. Por su parte, el Lagrangiano que se obtiene de R_2 es:

$$L_2(x,v) = \sqrt{v + \frac{1}{2}x^2}.$$

Igualmente podemos estudiar el problema inverso correspondiente a la ecuación de Abel. En este caso, es fácil ver que

$$\mathscr{D}_1(x,v) = v + kx^3$$

es un polinomio de Darboux para el campo $\Gamma^{(2)}$ dado en (21) correspondiente al cofactor $-kx^2$, puesto que

$$\left(v\frac{\partial}{\partial x} + F_A\frac{\partial}{\partial v}\right)(v+kx^3) = -kx^2(v+kx^3)\,.$$

Por su parte la divergencia del campo vectorial $\Gamma^{(2)}$ es $-4kx^2$, por lo que vemos que existe un multiplicador de Jacobi que es de la forma

$$R_1 = \mathscr{D}_1^{-4}\,.$$

En consecuencia, la ecuación de Abel admite una descripción lagrangiana mediante una función L tal que

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^2} = (v+kx^3)^{-4}\,,$$

de donde obtenemos el Lagrangiano $L = L_A$ dado por (22).

También el polinomio $\mathscr{D}_2$ definido por

$$\mathscr{D}_2(x,v) = 3v + kx^3$$

es un polinomio de Darboux para $\Gamma^{(2)}$ con un cofactor $-3kx^2$, ya que

$$\left(v\frac{\partial}{\partial x} + F_A\frac{\partial}{\partial v}\right)(3v+kx^3) = 3kx^2v - 3(4kx^2v + k^2x^5) = -3kx^2(3v+kx^3)\,,$$

por lo que podemos encontrar otro multiplicador de Jacobi de la forma $\mathscr{D}_2^{\nu_2}$ con $\nu_2 = -4/3$. Por tanto, la ecuación de Abel de segundo orden admite otra descripción lagrangiana mediante una función L tal que

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^2} = (3v+kx^3)^{-4/3}\,,$$

de donde podemos determinar el Lagrangiano $L = \widetilde{L}_A$ como

$$\widetilde{L}_A = (3v+kx^3)^{2/3}.$$

Agradecimientos

Los autores deben agradecer la financiación aportada por el Ministerio de Ciencia e Innovación mediante los proyectos MTM2009-11154 y MTM2010-12116-E, así como por la Diputación General de Aragón (proyecto E24/1).

REFERENCIAS

[1] H. ABEL, *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques*, J. Reine Angew. Math., 4 (1829), 309–348.

[2] M.J. ÁLVAREZ, A. GASULL, AND H. GIACOMINI, *A new uniqueness criterion for the number of periodic orbits of Abel equations*, J. Differential Equations, 234 (2007), 161–176.

[3] M. BRISKIN, J-P. FRANÇOISE, AND Y. YOMDIN, *The Bautin ideal of the Abel equation*, Nonlinearity, 11 (1998), 431–443.

[4] J.F. CARIÑENA, J. GRABOWSKI, AND J. DE LUCAS, *Quasi-Lie schemes: theory and applications*, J. Phys. A, 42 (2009), 335206.

[5] J.F. CARIÑENA, J. GRABOWSKI, AND G. MARMO. *Lie–Scheffers systems: a geometric approach*, Bibliopolis. (2000).

[6] J.F. CARIÑENA, J. GRABOWSKI, AND G. MARMO, *Superposition rules, Lie theorem and partial differential equations*, Rep. Math. Phys., 60 (2007), 237–258.

[7] J.F. CARIÑENA, P. GUHA, AND M.F. RAÑADA, *A geometric approach to higher-order Riccati chain: Darboux polynomials and constants of the motion*, J. Phys.: Conference Series, 175 (2009), 012009.

[8] J.F. CARIÑENA, P. GUHA, AND M.F. RAÑADA, *Higher-order Abel equations: Lagrangian formalism, first integrals and Darboux polynomials*, Nonlinearity, 22 (2009) 2953–2969.

[9] J.F. CARIÑENA, AND J. DE LUCAS, *Integrability of Lie systems through Riccati equations*, J. Nonlinear Math. Phys., 18 (2011), 29–54.

[10] J.F. CARIÑENA, AND J. DE LUCAS, *Superposition rules and second-order Riccati equations*, J. Geom. Mech., 3 (2011), 1–22.

[11] J.F. CARIÑENA, AND J. DE LUCAS, *Lie systems: theory, generalisations, and applications*, to appear in Dissertationes Math. arXiv:1103.4166.

[12] J.F. CARIÑENA, J. DE LUCAS, AND M.F. RAÑADA, *A geometric approach to integrability of Abel differential equations*, Int. J. Theor. Phys., 50 (2011), 2114–2124.

[13] J.F. CARIÑENA, AND J. NASARRE, *Lie-Scheffers systems in optics*, J. Opt. B Quantum Semiclass. Opt., 2 (2000), 94–99.

[14] J.F. CARIÑENA, AND A. RAMOS, *Applications of Lie systems in quantum mechanics and control theory*, in Classical and quantum integrability, Banach Center Publ. 59, Polish Acad. Sci. Warsaw, (2003), 143–162.

[15] J.F. CARIÑENA, M.F. RAÑADA, AND M. SANTANDER, *Lagrangian formalism for nonlinear second-order Riccati systems: one-dimensional integrability and two-dimensional superintegrability*, J. Math. Phys., 46 (2005), 062703.

[16] E.S. CHEB-TERRAB Y A.D. ROCHE, *An Abel ordinary differential equation class generalizing known integrable classes*, European J. Appl. Math., 14 (2003), 217–229.

[17] E.S. CHEB-TERRAB, AND A.D. ROCHE, *Abel ODEs: Equivalence and integrable classes*, Comput. Phys. Comm., 130 (2000), 204–231.

[18] J. CLEMENTE-GALLARDO, *On the relations between control systems and Lie systems*, en Groups, geometry and physics, Monogr. Real Acad. Ci. Exact. Fís.-Quím. Nat. Zaragoza, 29, Acad. Cienc. Exact. Fís. Quím. Nat. Zaragoza, Zaragoza, (2006), 65–78.

[19] D.G. CURRIE, AND E.J. SALETAN, *q-equivalent particle Hamiltonians I. The classical one-dimensional case*, J. Mathematical Phys., 7 (1966), 967–974.

[20] J. DOUGLAS, *Solution of the inverse problem of the calculus of variations*, Trans. Amer. Math. Soc., 50 (1941), 71–128.

[21] R. FLORES-ESPINOZA, *Monodromy factorization for periodic Lie systems y reconstruction phases*, en Geometric Methods in Physics. AIP. Conference Proceedings, American Institute of Physics 1079, (2009), 189–195.

[22] R. FLORES-ESPINOZA, *Periodic first integrals for Hamiltonian systems of Lie type*, to appear in Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.

[23] R. FLORES-ESPINOZA, J. DE LUCAS, AND Y.M. VOROBIEV, *Phase splitting for periodic Lie systems*, J. Phys. A, 43 (2010), 205208.

[24] M. EULER, N. EULER, AND P.G.L. LEACH, *The Riccati and Ermakov-Pinney hierarchies*, J. Nonlinear Math. Phys., 14 (2007), 290–310.

[25] V.R. GAVRILOV, V. D. IVASHCHUK, AND V.N. MELNIKOV, *Multidimensional integrable vacuum cosmology with two curvatures*, Classical Quantum Gravity, 13 (1996), 3039–3056.

[26] H. HELMHOLTZ, *Ueber die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung*, J. für die reine u. angewandte Math., 100 (1887), 137–166.

[27] O. KRUPKOVÁ, AND R. MALÍKOVÁ, *Helmholtz conditions and their generalizations*, Balkan J. Geom. Appl., 15 (2010), 80–89.

[28] S. Lie, *Sur une classe d'équations différentielles qui possèdent des systèmes fondamentaux d'intégrales*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 116 (1893), 1233–1236.
[29] S. Lie, and F. Engel. *Theorie der Transformationsgruppen.*, Teubner. (1893).
[30] S. Lie, and G. Scheffers. *Vorlesungen über continuierliche gruppen mit geometrischen und Anderen Anwendungen.*, Teubner. (1893).
[31] R. Liouville, *Sur une équation différentielle du premier ordre*, Acta Math., 27 (1903), 55–78.
[32] A. Mayer, *Die Existenzbedingungen eines kinetischen Potentiales*, Berich. Verh. Konig. Sach. Gesell. wissen. Leipzig, Math. Phys. Kl., 84 (1896), 519–529.
[33] D.E. Panayotounakos, *Exact analytic soluciones of unsolvable classes of first and second order nonlinear ODEs. I. Abel's equations*, Appl. Math. Lett., 18 (2005), 155–162.
[34] D.E. Panayotounakos, E.E. Theotokoglou, and M.P. Markakis, *Exact analytic solutions for the damped Duffing nonlinear oscillator*, C. R. Mecanique, 334 (2006), 311–316.
[35] F. Schwarz, *Algorithmic solution of Abel's equation*, Computing, 61 (1998), 39–46.
[36] F. Schwarz, *Symmetry analysis of Abel's equation*, Stud. Appl. Math., 100 (1998), 269–294.
[37] E. Vessiot, *Sur les systèmes d'équations différentielles du premier ordre qui ont des systèmes fondamentaux d'intégrales*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys., 8 (1894), H1–H33.
[38] A.-M. Wazwaz, *The modified decomposition method and Padé approximants for solving the Thomas–Fermi equation*, Applied Mathematics and Computation, 105 (1999), 11–19.
[39] P. Winternitz, *Lie groups and solutions of nonlinear differential equations*, en Lect. Notes Phys., 189 (1983), 263–305.
[40] A.V. Yurov, and V.A. Yurov, *Friedman versus Abel equations: a connection unraveled*, J. Math. Phys., 51 (2010), 082503.
[41] A.A. Zheltukhin, and M. Trzetrzelewski, *$U(1)$-invariant membranes: the geometric formulation, Abel, and pendulum differential equations*, J. Math. Phys., 51 (2010), 062303.

Universidad de Zaragoza, Zaragoza (España)
E-mail: `jfc@unizar.es`

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa (Polonia)
E-mail: `delucas@impan.gov.pl`

Universidad de Zaragoza, Zaragoza (España)
E-mail: `mfran@unizar.es`