ACTAS DEL XI CONGRESO
DR. ANTONIO A. R. MONTEIRO (2011)
2012, Páginas 35–59

VARIEDADES DE POISSON, GRUPOIDES Y ALGEBROIDES DE LIE

DAVID IGLESIAS PONTE

RESUMEN. Las variedades de Poisson aparecieron por primera vez como una herramienta para la mecánica clásica. Más precisamente, una estructura de Poisson en una variedad es un corchete de Lie en su espacio de funciones tal que se satisface la identidad de Leibniz $\{f,gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}$. Describiremos ciertos aspectos de una variedad de Poisson, como su estructura local o la cohomología asociada a ella, ilustrando la teoría con ejemplos.

Una categoría íntimamente relacionada con la geometría de Poisson es la de los algebroides de Lie, que pueden ser pensados como fibrados tangentes generalizados. De hecho, dada una variedad de Poisson, su fibrado cotangente está dotado de una estructura de algebroide de Lie. Otros ejemplos básicos son las álgebras de Lie y el fibrado tangente de cualquier variedad. Ilustraremos cómo diversos resultados en geometría de Poisson se pueden reinterpretar usando algebroides.

Los algebroides de Lie aparecieron por primera vez como los objetos infinitesimales asociados a los grupoides de Lie. Estos son una generalización de los grupos de Lie y también están asociados a la topología de una variedad a través del grupoide fundamental. Comentaremos algunos aspectos de los grupoides y, volviendo al punto de partida, su aplicación en geometría de Poisson.

ÍNDICE

1. VARIEDADES DE POISSON

1.1. Definición y ejemplos. La primera motivación para el estudio de la geometría de Poisson viene de la Mecánica Clásica. Sea el espacio $\mathbb{R}^6$ con coordenadas $(q^i, p_i)_{i=1,2,3}$ el espacio de fases de una partícula moviéndose en $\mathbb{R}^3$. Así, $(q^i)_{i=1,2,3}$ representa su posición y $(p_i)_{i=1,2,3}$ su momento.

La energía total de la partícula, asumiendo que su potencial V depende solo de las posiciones, es dada por la función hamiltoniana $H(q^i, p_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^3 p_i^2 + V(q^i)$. Entonces, las ecuaciones de movimiento de la partícula pueden ser escritas de forma hamiltoniana:

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \qquad i = 1,2,3.$$

Para cualquier observable $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$, i. e. una función diferenciable en el espacio de fases, la evolución en el tiempo está dada por

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i} \right).\end{aligned}$$

Esta ecuación puede ser escrita como

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\},$$

donde $\{\cdot,\cdot\}$ es un corchete en $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^6)$:

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} \right). \tag{1}$$

La axiomatización de este corchete nos lleva a la definición general de estructuras de Poisson.

Definición 1.1. *Decimos que* $(M, \{\cdot,\cdot\})$ *es una* variedad de Poisson *si* M *es una variedad diferenciable dotada de un corchete de Lie* $\{\cdot,\cdot\} : \mathscr{C}^\infty(M) \times \mathscr{C}^\infty(M) \to \mathscr{C}^\infty(M)$, $(f,g) \mapsto \{f,g\}$, *i. e.,*

1. $\{\cdot,\cdot\}$ *es anti-simétrico:* $\{f,g\} = -\{g,f\}$,
2. $\{\cdot,\cdot\}$ *satisface la identidad de Jacobi:* $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$,

satisfaciendo la regla de Leibniz

$$\{fg,h\} = f\{g,h\} + g\{f,h\}. \tag{2}$$

Decimos que $\{\cdot,\cdot\}$ *es un* corchete de Poisson *(o una estructura de Poisson) en el álgebra* $(\mathscr{C}^\infty(M), +, \cdot)$.

Nota 1.2. *De la formulación de la Mecánica Clásica utilizando el corchete de Poisson se derivan automáticamente las siguientes propiedades del sistema:*

- $\frac{dH}{dt} = \{H,H\} = 0$, *es decir, la energía es una integral primera del movimiento.*
- *Si* f *y* g *son constantes del movimiento* ($\{f,H\} = \{g,H\} = 0$) *entonces, usando la identidad de Jacobi, la función* $\{f,g\}$ *es también una constante del movimiento. De hecho, Poisson probó este resultado para su corchete sin conocer la identidad de Jacobi.*

Supongamos que $\{\cdot,\cdot\}$ es un corchete de Poisson en una variedad M. De la regla de Leibniz tenemos que $\{f,\cdot\}$ determina un campo de vectores, que llamaremos *campo hamiltoniano* y denotaremos por X_f (ver Sección 1.2 para más propiedades). Junto con la antisimetría tenemos que

$$\{f,g\} = \langle dg, X_f\rangle = -\langle df, X_g\rangle,$$

con lo que tenemos que existe un bivector $\Pi \in \mathfrak{X}^2(M) = \Gamma(\wedge^2 TM)$ tal que

$$\{f,g\} = \Pi(df,dg), \qquad (f,g \in \mathscr{C}^\infty(M)). \tag{3}$$

Dado un bivector $\Pi \in \mathfrak{X}^2(M)$ tenemos el morfismo de fibrados vectoriales $\Pi^\sharp : T^*M \to TM$ definido por

$$\langle \beta, \Pi^\sharp(\alpha)\rangle = \Pi(\alpha,\beta), \qquad (\alpha,\beta \in T^*M).$$

En particular, $X_f = \Pi^\sharp(df)$, para todo $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$.

Ejemplo 1.3. *Si Π es no degenerado, es decir, $\Pi^\sharp$ es un isomorfismo, entonces $(\Pi^\sharp)^{-1} : TM \to T^*M$ induce una 2-forma (también no degenerada) que denotaremos por Ω_Π. Explícitamente, $\Omega_\Pi(X,Y) = -\Pi(\Pi^{\sharp-1}(X), \Pi^{\sharp-1}(Y))$, para $X,Y \in TM$. Así, se puede probar que la relación entre el corchete de Poisson $\{\cdot,\cdot\}$ y Ω_Π es*

$$\{f,g\} = -\Omega_\Pi(X_f,X_g), \qquad (f,g \in \mathscr{C}^\infty(M)).$$

Además, la identidad de Jacobi es equivalente a que Ω_Π sea cerrada. Por tanto, concluimos que las variedades simplécticas (variedades dotadas de una forma cerrada y no degenerada) son un caso particular de variedades de Poisson. Un caso particular, de relevante interés en Mecánica, es el fibrado cotangente T^*M de cualquier variedad M con la estructura simpléctica canónica Ω_M. La expresión de Ω_M en coordenadas fibradas (q^i, p_i) es $\Omega_M = \sum_i dq^i \wedge dp_i$.

Usando el bivector Π asociado al corchete de Poisson, tenemos que localmente (en coordenadas $(x_1,\dots,x_n)$) viene dado por la siguiente expresión:

$$\{f,g\}(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \Pi_{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\frac{\partial g}{\partial x_j}(x), \tag{4}$$

donde $\Pi_{ij}(x)$ son funciones que satisfacen las siguientes propiedades:

$$\Pi_{ij}(x) = -\Pi_{ji}(x), \qquad (i,j \in \{1,\dots,n\}, x \in \mathbb{R}^n), \tag{5}$$

$$\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_l}\Pi_{lk} + \frac{\partial \Pi_{jk}}{\partial x_l}\Pi_{li} + \frac{\partial \Pi_{ki}}{\partial x_l}\Pi_{lj}\right) = 0, \qquad (i,j,k \in \{1,\dots,n\}, x \in \mathbb{R}^n). \tag{6}$$

Veamos algunos ejemplos básicos de variedades de Poisson intentando resolver las ecuaciones (5) y (6).

Ejemplo 1.4. *(Estructuras de Poisson constantes)*
Si las funciones $\Pi_{ij}(x)$ son constantes, entonces la ecuación (6) se cumple trivialmente y la condición para que determinen una estructura de Poisson se reduce a que la matriz (Π_{ij}) sea anti-simétrica.

Un ejemplo de esta situación es el corchete (1), que corresponde, en coordenadas $(q^1, q^2, q^3, p_1, p_2, p_3)$, a la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -Id_{3\times 3} \\ Id_{3\times 3} & 0 \end{pmatrix}.$$

De manera más general que en (1), se tiene que en $\mathbb{R}^{2k+r}$ con coordenadas (q^i, p_i, c^α) con $i = 1, \ldots, k$, $\lambda = 1, \ldots r$, podemos definir una estructura de Poisson de la siguiente manera:

$$\Pi(q^i, p_i, c^\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial q^i}. \tag{7}$$

Notar que las funciones c^λ satisfacen $\{c^\lambda, \cdot\} = 0$ (se pueden ver como constantes del movimiento para cualquier función hamiltoniana).

Ejemplo 1.5. *(Estructuras de Poisson lineales)*
Dadas funciones lineales

$$\Pi_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k x_k, \tag{8}$$

las ecuaciones (5) y (6) se reducen a

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k,$$
$$\sum_{l=1}^{n} \left(C_{ij}^l C_{lk}^m + C_{jk}^l C_{li}^m + C_{ki}^l C_{lj}^m \right) = 0,$$

para todo $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$. Es decir, las constantes $\{C_{ij}^k\}$ son las constantes de estructura de un álgebra de Lie de dimensión n.

Evidentemente, este resultado también se da para cualquier espacio vectorial. Si $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial con una estructura de Poisson lineal, entonces existe una estructura de álgebra de Lie en $\mathfrak{g}^*$ con corchete de Lie

$$[u, v]_{\mathfrak{g}^*} = \{u, v\},$$

para $u, v \in \mathfrak{g}^*$.

Recíprocamente, si $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ es un álgebra de Lie de dimensión finita, el espacio vectorial dual $\mathfrak{g}^*$ posee una estructura de Poisson lineal definida de la siguiente manera: Dadas dos funciones $f, g \in \mathscr{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ y $\xi \in \mathfrak{g}^*$, identificando $T_\xi \mathfrak{g}^*$ con $\mathfrak{g}^*$, podemos considerar las diferenciales $df(\xi), dg(\xi) : T_\xi \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ como elementos de $\mathfrak{g}$. Así,

$$\{f, g\}(\xi) = \langle \xi, [df(\xi), dg(\xi)]_{\mathfrak{g}} \rangle.$$

Si tomamos coordenadas lineales (x_l) asociadas a una base $\{e_l\}$ de $\mathfrak{g}$ con constantes de estructura C_{ij}^k, las funciones $\Pi_{ij}(x_l)$ de la estructura de Poisson vienen dadas por (8).

De la discusión anterior se sigue el siguiente resultado.

Proposición 1.6. *Existe una correspondencia unívoca entre las álgebras de Lie de dimensión finita y las estructuras de Poisson lineales en el espacio dual.*

Por ejemplo, la estructura de álgebra de Lie en $\mathfrak{so}(3)$ con base $\{e_1, e_2, e_3\}$ y las relaciones de conmutación

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2,$$

se corresponde con la estructura de Poisson lineal en $\mathbb{R}^3 \cong \mathfrak{so}(3)^*$ con coordenadas (Π_1, Π_2, Π_3)

$$\{\Pi_1, \Pi_2\} = \Pi_3, \quad \{\Pi_2, \Pi_3\} = \Pi_1, \quad \{\Pi_3, \Pi_1\} = \Pi_2. \tag{9}$$

Nota 1.7. *El resultado anterior se puede generalizar al contexto de fibrados vectoriales. Decimos que una estructura de Poisson en un fibrado vectorial $A \to M$ es* lineal *si el corchete de dos funciones lineales en las fibras es lineal. En este caso, en el fibrado dual $A^* \to M$ existe un corchete de álgebra de Lie en el espacio de las secciones que, junto con* *un morfismo de fibrados vectoriales* $\rho : A^* \to TM$*, determina una estructura de algebroide de Lie. Volveremos a este concepto en la Sección 2.*

Ejemplo 1.8. *(Estructura de Poisson producto)*
Si $(M, \{\cdot,\cdot\}_M)$ *y* $(N, \{\cdot,\cdot\}_N)$ *son dos variedades de Poisson, entonces el producto* $M \times N$ *es naturalmente una variedad de Poisson con el corchete dado por*

$$\{f,g\}_{M\times N}(x,y) = \{f(x,\cdot),g(x,\cdot)\}_N(y) + \{f(\cdot,y),g(\cdot,y)\}_M(x).$$

En coordenadas locales, si $\{\cdot,\cdot\}_M$ *(respectivamente,* $\{\cdot,\cdot\}_N$*) está dado localmente por las matrices* $\Pi^M_{ij}(x)$ *(respectivamente,* $\Pi^N_{kl}(y)$*) para un entorno coordenado* (U,x) *(respectivamente,* (V,y)*) entonces en un entorno coordenado* $(U\times V,(x,y))$ *la estructura de Poisson en* $M\times N$ *está dada por*

$$\begin{pmatrix} \Pi^M_{ij}(x) & 0 \\ 0 & \Pi^N_{kl}(y) \end{pmatrix}.$$

Definición 1.9. *Una aplicación diferenciable* $\phi : M \to N$ *entre dos variedades de Poisson* $(M, \{\cdot,\cdot\}_M)$ *y* $(N, \{\cdot,\cdot\}_N)$ *es una* aplicación de Poisson *si*

$$\{f\circ\phi, g\circ\phi\}_M = \{f,g\}_N\circ\phi, \qquad (f,g\in\mathscr{C}^\infty(N)).$$

Una aplicación de Poisson se dice que es completa *si para cada campo hamiltoniano* X_h *que es completo en* N*, el campo hamiltoniano* X_{ϕ^*h} *también es completo en* M*.*

En términos de los bivectores Π_M y Π_N, la aplicación ϕ es de Poisson si y solo si

$$d\phi(\Pi_M(x)) = \Pi_N(\phi(x)), \qquad (x\in M), \tag{10}$$

o, usando el morfismo $\Pi^\sharp_M$ y $\Pi^\sharp_N$,

$$d\phi\circ\Pi^\sharp_M\circ\phi^* = \Pi^\sharp_N. \tag{11}$$

1.2. Campo de vectores hamiltoniano. Dada una variedad simpléctica (M,Ω), se puede definir la noción de campo de vectores hamiltoniano, asociado a una función hamiltoniana $H\in\mathscr{C}^\infty(M)$, como el campo de vectores X_H que satisface $i_{X_H}\Omega = dH$. Como ya se comentó en la Sección 1.1, usando la identidad de Leibniz esta noción se puede extender a una variedad de Poisson de la siguiente manera:

Definición 1.10. *Sea* $(M,\{\cdot,\cdot\})$ *una variedad de Poisson. Dada una función* $f\in\mathscr{C}^\infty(M)$*, el* campo hamiltoniano de f*, denotado por* X_f*, está caracterizado por*

$$X_f(g) = \{f,g\}, \qquad (g\in\mathscr{C}^\infty(M)). \tag{12}$$

En coordenadas, si $\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \Pi_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial}{\partial x_j}$, entonces

$$X_f = \sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^n \Pi_{ji}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

y su flujo viene dado por las ecuaciones

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \Pi_{ji}\frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Ejemplo 1.11. *Como comentamos al principio, si H es el hamiltoniano de un sistema clásico, con corchete dado en (1), entonces la evolución de cualquier observable se puede ver como*

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\} = X_H(f).$$

Otro ejemplo interesante se obtiene al considerar la estructura de Poisson (9) en $\mathfrak{so}(3)^*$. Si consideramos el hamiltoniano $H = \frac{1}{2}(\frac{\Pi_1^2}{I_1} + \frac{\Pi_2^2}{I_2} + \frac{\Pi_3^2}{I_3})$, las curvas integrales del campo hamiltoniano X_H satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\dot{\Pi}_1 &= \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3}\Pi_2\Pi_3, \\
\dot{\Pi}_2 &= \frac{I_3 - I_1}{I_1 I_3}\Pi_1\Pi_3, \\
\dot{\Pi}_2 &= \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2}\Pi_1\Pi_2,
\end{aligned}$$

que son precisamente las ecuaciones de Euler para el cuerpo rígido con momentos principales de inercia I_1, I_2, I_3, y donde Π_i representan los momentos angulares (ver, por ejemplo, [14]).

Una propiedad fundamental de los campos de vectores hamiltonianos es que para cualquier par de funciones f, g se tiene que

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}. \tag{13}$$

Esta propiedad es una consecuencia directa de aplicar el corchete de Lie de campos a una función arbitraria h y usar la identidad de Jacobi:

$$\begin{aligned}
[X_f, X_g](h) &= X_f(X_g(h)) - X_g(X_f(h)) = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} \\
&= \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} = -\{h, \{f, g\}\} = \{\{f, g\}, h\} = X_{\{f,g\}}(h).
\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que la estructura de Poisson se preserva a lo largo del flujo de un campo hamiltoniano.

Corolario 1.12. *Dada una variedad de Poisson (M, Π), tenemos que*

$$\mathscr{L}_{X_f}\Pi = 0, \qquad (f \in \mathscr{C}^\infty(M)),$$

es decir, el bivector de Poisson Π se preserva a lo largo del flujo de un campo hamiltoniano.

DEMOSTRACIÓN. Si $g_1, g_2 \in \mathscr{C}^\infty(M)$ entonces

$$\begin{aligned}
(\mathscr{L}_{X_f}\Pi)(dg_1, dg_2) &= X_f(\Pi(dg_1, dg_2)) - \Pi(\mathscr{L}_{X_f}dg_1, dg_2) - \Pi(dg_1, \mathscr{L}_{X_f}dg_2) \\
&= \{f, \{g_1, g_2\}\} + \{\{f, g_1\}, g_2\} + \{g_1, \{f, g_2\}\} = 0.
\end{aligned}$$

□

1.3. Corchete de Schouten.

Una pregunta natural que surge es la de caracterizar la integrabilidad de la estructura de Poisson (la identidad de Jacobi) en términos del bivector de Poisson. Para ello, introducimos una operación en el espacio de los k-vectores $\Gamma(\wedge^k TM)$, también denotado por $\mathfrak{X}^k(M)$, de una variedad M, que generaliza la derivada de Lie de campos de vectores.

Proposición 1.13. *Dada una variedad M, existe una única operación $\mathbb{R}$-bilineal*

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}^p(M) \otimes \mathfrak{X}^q(M) \to \mathfrak{X}^{p+q-1}(M),$$

que extiende la derivada de Lie de campos de vectores y que satisface las propiedades:

$$[P,Q] = -(-1)^{(p-1)(q-1)}[Q,P], \tag{14}$$

$$[P,Q\wedge R] = [P,Q]\wedge R + (-1)^{(p-1)q}Q\wedge [P,R], \tag{15}$$

$$(-1)^{(p-1)(r-1)}[P,[Q,R]] + (-1)^{(q-1)(p-1)}[Q,[R,P]] + (-1)^{(r-1)(q-1)}[R,[P,Q]] = 0, \tag{16}$$

para todo $P \in \mathfrak{X}^p(M)$*,* $Q \in \mathfrak{X}^q(M)$ *y* $R \in \mathfrak{X}^r(M)$*.*

Esta operación se denomina corchete de Schouten.

Notas 1.14. *1. Con las propiedades enunciadas en la Proposición anterior, el espacio de los multivectores* $(\mathfrak{X}(M) = \oplus_{i=0}^n \mathfrak{X}^i(M), \wedge, [\cdot,\cdot])$ *es un álgebra de Gerstenhaber.*

2. Existe una expresión intrínseca del corchete de Schouten de una variedad. Si $P \in \mathfrak{X}^p(M)$ *y* $Q \in \mathfrak{X}^q(M)$ *son multivectores de grado p y q respectivamente, y* $\omega \in \Omega^{p+q-1}(M)$ *es una* $(p+q-1)$*-forma entonces*

$$i([P,Q])\omega = (-1)^q i(P)d\,(i(Q)\omega) - i(Q)d\,(i(P)\omega) - (-1)^{p+1}i(P\wedge Q)d\omega,$$

donde la operación $i(P)\omega$ *está definida como*

$$(i(X_1\wedge\ldots\wedge X_k)\Theta)(Y_1,\ldots,Y_r) = \Theta(X_1,\ldots,X_k,Y_1,\ldots,Y_r),$$

para $\Theta \in \Omega^{k+r}(M)$*.*

3. Hay que hacer notar que en la literatura aparece otra expresión $[\cdot,\cdot]'$ *para el corchete de Schouten (ver, por ejemplo,* [11, 15]*). La relación entre ambos corchetes de Schouten es*

$$[P,Q]' = (-1)^{p+1}[P,Q], \qquad P \in \mathfrak{X}^p(M), Q \in \mathfrak{X}^\bullet(M).$$

Como es importante para nuestros resultados posteriores, veamos qué ocurre cuando uno de los multicampos es una función $\mathscr{C}^\infty(M) = \Gamma(\wedge^0 TM)$.

Lema 1.15. *Si P es un p-vector y* $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ *entonces*

$$[P,f] \;=\; (-1)^{p+1} i_{df}P, \tag{17}$$

donde $i_{df}P$ *es la contracción de P por* df*.*

DEMOSTRACIÓN. Se deduce el resultado de una cuenta en coordenadas, usando (14), (15) y que $[f,g] = 0$ para cualquier par de funciones. □

Veamos la caracterización de un bivector de Poisson en términos del corchete de Schouten.

Proposición 1.16. *Sea M una variedad y* Π *un bivector en M. Entonces,* Π *es un bivector de Poisson si y solo si*

$$[\Pi,\Pi] = 0. \tag{18}$$

DEMOSTRACIÓN. Utilizando Lema 1.15, se tiene que

$$[\Pi,\Pi](df,dg,dh) = 2\left(\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\}\right)$$

para todo $f,g,h \in \mathscr{C}^\infty(M)$. □

1.4. La estructura local de las variedades de Poisson. Linealización. Consideremos $\mathbb{R}^{2k+r}$ con la estructura de Poisson (7). Si tomamos las subvariedades definidas por $c^\alpha =$ constante, vemos que estas heredan una estructura de Poisson no degenerada, es decir, una estructura simpléctica. Veamos que, de hecho, toda variedad de Poisson es esencialmente la unión de variedades simplécticas de manera "suave".

Definición 1.17. *Dada una variedad de Poisson (M,Π) y $x \in M$, el* rango de Π en x *es el rango de $\Pi^\sharp(x) : T_x^*M \to T_xM$.*

Nota 1.18. *Notar que, al ser $\Pi^\sharp$ antisimétrica, entonces el rango es un número par.*

Usando el Corolario 1.12 tenemos que el rango de Π es constante a lo largo de las órbitas de los flujos hamiltonianos. De aquí se deduce el siguiente resultado.

Proposición 1.19. *Definimos en (M,Π) la relación en la que dos puntos $x,y \in M$ están relacionados si podemos pasar de x a y mediante una curva diferenciable a trozos, donde cada uno de los trozos diferenciables es la curva integral de un campo hamiltoniano. Entonces, esta relación es de equivalencia, y las clases de equivalencia son subvariedades de Poisson de M. Además, la dimensión de cada subvariedad L es igual al rango de la estructura de Poisson en los puntos de L.*

Notas 1.20.

1. *Notar que si L es una subvariedad dada por la proposición anterior, si $x \in L$ entonces $T_xL =$ span $\{X_f(x) \mid f \in \mathscr{C}^\infty(M)\}$. Otra manera de verlo es que $T_xL = \Pi^\sharp(T_x^*M)$.*

   De hecho, podemos definir la distribución (singular) dada por $\Pi^\sharp(T^*M)$ y, probando que es completamente integrable (ver [15]*), recuperaríamos el resultado de la Proposición 1.19.*
2. *Notar que al ser el rango de la estructura de Poisson igual a la dimensión de la subvariedad L, la estructura de Poisson inducida en L es de rango máximo, es decir, L es una variedad simpléctica. Es por esto que la foliación se denomina* la foliación simpléctica *de (M,Π).*

Ejemplo 1.21. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita. Veamos quiénes son las hojas simplécticas de la estructura de Poisson lineal en $\mathfrak{g}^*$.*

Sean $u,v \in \mathfrak{g}$ dos elementos de $\mathfrak{g}$ vistos como funciones lineales en $\mathfrak{g}^*$. Dado $\xi \in \mathfrak{g}^*$,

$$\langle \alpha, X_u(v)\rangle = \{u,v\}(\alpha) = \langle \alpha, [u,v]_{\mathfrak{g}}\rangle = -\langle ad_u^*\alpha, v\rangle,$$

con lo que el campo hamiltoniano de u es el campo infinitesimal de la representación coadjunta de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}^*$, $(u,\alpha) \mapsto ad_u^*\alpha = -\langle \alpha, [u,\cdot]_{\mathfrak{g}}\rangle$. Como por la regla de Leibniz es suficiente estudiar los campos de las funciones lineales, se concluye que las hojas simplécticas de la estructura de Poisson lineal en $\mathfrak{g}^*$ son las órbitas de la representación coadjunta.

Estudiaremos ahora la forma que tiene una variedad de Poisson alrededor de cada punto.

Teorema 1.22. *(Teorema splitting de Weinstein)* [16]
Sean (M,Π) una variedad de Poisson, y $x_0 \in M$ tal que el rango de Π en x_0 es $2h$. Entonces, existe un entorno U de x_0 en M y un isomorfismo Poisson $\varphi : U \to S \times N$ de $(U, \Pi_{|U})$ en el producto $S \times N$, donde S es una variedad simpléctica de dimensión $2h$, y N es una variedad de Poisson de rango 0 en $\varphi(x_0)$. Además, los factores S y N son únicos salvo equivalencia local.

DEMOSTRACIÓN. Sea $2h$ el rango de Π en x_0. Probaremos el teorema por inducción en h.

Si $h = 0$ entonces $\Pi(x_0) = 0$ y no hay nada que hacer.

Supongamos ahora que $h > 0$. Entonces, existen dos funciones q_1' y p^1 tales que $\{q_1', p^1\}(x_0) \neq 0$, i. e., $X_{p^1}(x_0) \neq 0$. Usando el "flow box theorem", existen un entorno U y una función q_1 tal que $X_{p^1}(q_1) = \{p^1, q_1\} = 1$. Como X_{p^1} y X_{q_1} son independientes (ya que $X_{p^1} = \frac{\partial}{\partial q_1} + \dots$ y $X_{q_1} = -\frac{\partial}{\partial p^1} + \dots$) y, de (13), conmutan (determinando una foliación regular de dimensión 2), existen coordenadas $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ tales que $X_{p^1} = \frac{\partial}{\partial x_1}$ y $X_{q_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}$. Por tanto,

$$\{p^1, x_\lambda\} = X_{p^1}(x_\lambda) = \{q_1, x_\lambda\} = X_{q_1}(x_\lambda) = 0, \qquad (\lambda = 3, \dots, n).$$

Por tanto, el jacobiano de $(q_1(x_\lambda), p^1(x_\lambda), x_3, \dots, x_n)$ es diferente de cero, formando $(q_1, p^1, x_3, \dots, x_n)$ un sistema coordenado donde las funciones x_λ conmutan con q_1 y p^1. Usando la identidad de Jacobi, $\{x_\lambda, x_\gamma\}$ también conmutan con q_1 y p^1. De ahí,

$$\begin{aligned} 0 = \{q_1, \{x_\lambda, x_\gamma\}\} &= \frac{\partial\{x_\lambda, x_\gamma\}}{\partial p^1}\{p^1, q_1\} + \frac{\partial\{x_\lambda, x_\gamma\}}{\partial q_1}\{q_1, q_1\} + \frac{\partial\{x_\lambda, x_\gamma\}}{\partial x_\mu}\{p^1, x_\mu\} \\ &= \frac{\partial\{x_\lambda, x_\gamma\}}{\partial p^1}, \end{aligned}$$

con lo que $\{x_\lambda, x_\gamma\}$ es independiente de p_1 y análogamente para q^1. Por tanto, $\{x_\lambda, x_\gamma\} = \nu_{\lambda\gamma}(x)$ y M es el producto de una variedad simpléctica de dimensión 2 y una variedad de Poisson cuya dimensión y rango en cada punto es $\dim M - 2$.

Si repetimos este proceso, llegamos al resultado buscado, encontrando coordenadas $(q_1, \dots, q_h, p^1, \dots, p^h, y_1, \dots, y_s)$ que satisfacen

$$\begin{aligned} &\{q_i, q_j\} = \{p^i, p^j\} = \{q_i, y_\lambda\} = \{p^i, y_\lambda\} = 0, \\ &\{q_i, p^j\} = \delta_i^j \\ &\{y_\lambda, y_\gamma\} = \nu_{\lambda\gamma}(y), \text{ donde } \nu_{\lambda\gamma}(x_0) = 0. \end{aligned}$$

La unicidad de la subvariedad simpléctica S se sigue del hecho de que su dimensión es precisamente el rango de S. Más precisamente, S es la hoja simpléctica local a lo largo de x_0.

No entraremos en demasiado detalle para probar la unicidad de N. La idea fundamental es la siguiente. Supongamos que tenemos N y N'. En un entorno pequeño N y N' se pueden conectar por una familia de subvariedades N_t, $0 \leq t \leq 1$, dadas por las ecuaciones

$$p^i = P^i(y_\alpha, t), \qquad q_i = Q_i(y_\alpha, t).$$

Queremos encontrar una familia de difeomorfismos de Poisson ψ_t tal que $N_t = \psi_t(N)$. Dichos difeomorfismos son el flujo de un campo de vectores hamiltoniano dependiente del tiempo X_{H_t}. Pidamos también que $H_t = 0$ en N_t. Usando que el campo $X_{H_t} + \frac{\partial}{\partial t}$ es tangente a N_t, se puede probar que dicha función H_t existe (se usan las coordenadas obtenidas en la primera parte del teorema y que $\Pi(x_0) = 0$). □

Definición 1.23. *Las coordenadas* $(q_1, \dots, q_h, p^1, \dots, p^h, y_1, \dots, y_s)$ *que se obtienen del teorema anterior se denominan* coordenadas canónicas *para la variedad de Poisson en* x_0 *y satisfacen*

$$\begin{aligned} &\{q_i, q_j\} = \{p^i, p^j\} = \{q_i, y_\lambda\} = \{p^i, y_\lambda\} = 0, \\ &\{q_i, p^j\} = \delta_i^j \\ &\{y_\lambda, y_\gamma\} = \nu_{\lambda\gamma}(y), \textit{ donde } \nu_{\lambda\gamma}(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Definición 1.24. *Dada una variedad de Poisson, la variedad de Poisson en N es lo que se denomina la* estructura de Poisson transversa *en* x_0.

Usando el Teorema splitting, se deduce que el estudio local se reduce al caso en que la estructura de Poisson tiene rango 0. Veamos que, en este caso, la estructura de Poisson se puede aproximar por una estructura de Poisson lineal.

Sean $(M, \{\cdot,\cdot\})$ una variedad de Poisson y x_0 un punto donde la estructura de Poisson se anula, i. e. $\{f,g\}(x_0) = 0$ para todo par de funciones $f,g \in \mathscr{C}^\infty(M)$. Entonces $\mathfrak{g}_{x_0} = T^*_{x_0}M$ se convierte en un álgebra de Lie con el corchete

$$[df(x_0), dg(x_0)]_{\mathfrak{g}_{x_0}} = d\{f,g\}(x_0). \tag{19}$$

En coordenadas locales alrededor de x_0, si $\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \Pi_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$ y hacemos un desarrollo en serie de Π_{ij}, entonces $\Pi_{ij}(x) = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k x_k + \mathscr{O}(x^2)$, donde $C_{ij}^k = \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_k}$ son las constantes de estructura del álgebra. Esta álgebra de Lie se denomina el álgebra de Lie de isotropía en x_0. Equivalentemente, $T_{x_0}M = \mathfrak{g}^*_{x_0}$ está dotado de una estructura de Poisson lineal que se denomina la *aproximación lineal* en x_0. El problema de linealización de $(M, \{\cdot,\cdot\})$ alrededor de x_0 es el siguiente:

> ¿Existe un difeomorfismo de Poisson $\psi : U \to V$ de un entorno U de x_0 en M hacia un entorno V de 0 en $T_{x_0}M$?

En este caso, se dice que la estructura de Poisson es linealizable alrededor de x_0.

Ejemplo 1.25. *El siguiente ejemplo* [8, p. 108] *muestra que no toda estructura de Poisson es linealizable.*

Consideremos $\mathbb{R}^2$ *con la estructura de Poisson no trivial* $(x_1^2 + x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2}$. *Como es cuadrático, la linealización en* $(0,0)$ *es la estructura de Poisson nula, con lo que no pueden ser equivalentes.*

Otro ejemplo de estructura no linealizable es $SL(2,\mathbb{R})$ *con el corchete de Poisson dado por*

$$\{x_1, x_2\} = -x_2, \quad \{x_2, x_3\} = x_1, \quad \{x_3, x_1\} = x_2.$$

(para un desarrollo de este ejemplo, ver [16]*).*

El teorema de linealización más fuerte que se conoce en esta dirección es el siguiente [2, 7].

Teorema 1.26. *Sean* $(M, \{\cdot,\cdot\})$ *una variedad de Poisson y* x_0 *un punto donde la estructura de Poisson se anula. Si el álgebra de isotropía* $\mathfrak{g}_{x_0}$ *es semi-simple de tipo compacto (la forma de Killing es definida negativa), entonces la estructura de Poisson es linealizable alrededor de* x_0.

1.5. Cohomología de Poisson. Dada una variedad de Poisson, podemos definir el operador contravariante $d_\Pi : \mathfrak{X}^\bullet(M) \to \mathfrak{X}^{\bullet+1}(M)$ por

$$d_\Pi Q = [\Pi, Q], \qquad (Q \in \mathfrak{X}^\bullet(M)).$$

De la identidad de Jacobi graduada del corchete de Schouten (16) y (18) se tiene que d_Π es un operador diferencial, es decir, $d_\Pi \circ d_\Pi = 0$. Esta diferencial nos lleva a la siguiente definición [11].

Definición 1.27. *Sea* (M, Π) *una variedad de Poisson. Los grupos de cohomología*

$$\frac{\ker(d_\Pi : \mathfrak{X}^\bullet(M) \to \mathfrak{X}^\bullet(M))}{\mathrm{Im}(d_\Pi : \mathfrak{X}^{\bullet-1}(M) \to \mathfrak{X}^\bullet(M))}$$

asociados a la diferencial $d_\Pi = [\Pi, \cdot]$ *forman la* cohomología Poisson*, que se denota por* $H^\bullet_\Pi(M)$.

Los grupos de cohomología Poisson $H^k_\Pi(M)$ tienen una interpretación geométrica interesante, para los primeros valores de k, como se muestra a continuación:

- $k = 0$

Si $f \in C^\infty(M)$ entonces $d_\Pi f = -X_f$, el campo hamiltoniano de f (con cambio de signo). Por tanto, $H^0_\Pi(M)$ es el conjunto de funciones f tales que $\{f, \cdot\} = 0$, es decir, las *funciones Casimir* de la estructura de Poisson.

- $k = 1$

Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo de vectores en M, se tiene que $d_\Pi X = 0$ si X es un automorfismo infinitesimal de la estructura de Poisson (su flujo está formado por difeomorfismos de Poisson), denominado campo de vectores de Poisson. Por tanto, como los campos hamiltonianos se pueden ver como automorfismos infinitesimales interiores, $H^1_\Pi(M)$ se puede interpretar como los automorfismos infinitesimales exteriores.

- $k = 2$

Dado un bivector Λ, si $d_\Pi\Lambda = 0$ tomando ε como un parámetro (infinitesimal) formal entonces $\Pi + \varepsilon\Lambda$ es una estructura de Poisson hasta el orden ε^2,

$$[\Pi + \varepsilon\Lambda, \Pi + \varepsilon\Lambda] = \varepsilon^2[\Lambda, \Lambda] = 0 \text{ mod } \varepsilon^2.$$

Así, podemos ver $\Pi + \varepsilon\Lambda$ como una deformación infinitesimal de Π. Por otra parte, si $X \in \mathfrak{X}(M)$, se tiene que $\Pi + \varepsilon[\Pi, X]$ es igual a $d\varphi^\varepsilon(\Pi)$ hasta el orden ε^2, donde φ^ε es el flujo de X a tiempo ε. Por tanto, $\Pi + \varepsilon[\Pi, X]$ es una deformación infinitesimal trivial salvo difeomorfismos infinitesimales. Concluimos entonces que $H^2_\Pi(M)$ es el cociente de todas las deformaciones infinitesimales posibles de Π módulo el espacio de las deformaciones triviales.

Notar que $H^2_\Pi(M)$ tiene un elemento distinguido, que es $[\Pi]$. En el caso particular en el que existe $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $d_\Pi(X) = \Pi$, se dice que (M, Π) es una variedad de Poisson exacta. Esto ocurre para todas las estructuras de Poisson lineales donde X es el campo de vectores de Euler o campo radial (con expresión $X = \sum_i x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ para coordenadas lineales (x^i)).

Estos espacios de cohomología no están tan relacionados con la topología de la variedad como lo puedan estar los espacios de cohomología de De Rham, y además pueden ser "muy grandes", incluso de dimensión infinita. Un ejemplo trivial es el caso $\Pi = 0$, donde $H^\bullet(M) = \mathfrak{X}^\bullet(M)$. Sin embargo, existe una relación entre la cohomología de Poisson y la cohomología de De Rham de la variedad.

Proposición 1.28. *Sea una variedad de Poisson* (M, Π)*. Entonces* $\Pi^\sharp$ *induce un homomorfismo entre los grupos de cohomología* $\Pi^\sharp : H^\bullet_{deR}(M) \to H^\bullet_\Pi(M)$*. Si* Π *viene de una variedad simpléctica, entonces es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Si ω es una k-forma en M, entonces se puede probar que

$$d_\Pi(\Pi^\sharp(\omega)) = -\Pi^\sharp(d\omega).$$

De aquí se deduce que la aplicación $\Pi^\sharp[\omega] = [\Pi^\sharp(\omega)]$ está bien definida. □

1.6. Reducción de estructuras de Poisson. Sea G un grupo de Lie actuando en una variedad de Poisson. Decimos que la acción $\Phi : M \times G \to M$ es *Poisson* si $\Phi_g : M \to M$ es un difeomorfismo Poisson para todo $g \in G$.

Proposición 1.29. *Si una acción de un grupo de Lie G (con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$) sobre una variedad de Poisson (M,Π) es Poisson, entonces los campos infinitesimales preservan la estructura de Poisson*

$$\mathscr{L}_{u_M}\Pi = 0, \qquad (u \in \mathfrak{g}).$$

Una consecuencia inmediata de que la acción sea Poisson es que el conjunto de funciones G-invariantes $\mathscr{C}^\infty(M)^G$ es cerrado con el corchete de Poisson, usando

$$\mathscr{L}_{u_M}\{f,g\} = \{\mathscr{L}_{u_M}f,g\} + \{f,\mathscr{L}_{u_M}g\}.$$

Por tanto si la relación de equivalencia de pertenecer a la órbita es regular, entonces el espacio de órbitas M/G se convierte en una variedad de Poisson y la proyección $p\colon M \to M/G$ es una aplicación de Poisson.

Ejemplo 1.30. *Sea $M = G$ un grupo de Lie. Dicho grupo actúa sobre sí mismo por traslaciones a derecha y esta acción se levanta a una acción de G en T^*G que es Poisson, donde estamos considerando en T^*G la estructura de Poisson inducida por la 2-forma simpléctica canónica. El espacio de órbitas $(T^*G)/G$ es entonces una variedad de Poisson, que puede ser identificada con $\mathfrak{g}^*$. Además la estructura de Poisson en $\mathfrak{g}^*$ es precisamente la estructura de Poisson lineal inducida de la estructura de álgebra de Lie en $\mathfrak{g}$.*

Queremos estudiar ahora qué ocurre cuando los campos infinitesimales son campos hamiltonianos, es decir, para todo $u \in \mathfrak{g}$ existe una función $\hat{J}(u)$ tal que

$$u_M = X_{\hat{J}(u)}.$$

Definición 1.31. *Sea G un grupo de Lie actuando en una variedad de Poisson. Decimos que la acción $\Phi : M \times G \to M$ es* hamiltoniana *si existe una aplicación equivariante $J : M \to \mathfrak{g}^*$ tal que*

$$u_M = X_{\hat{J}(u)}, \qquad (u \in \mathfrak{g}),$$

donde $\hat{J}(u) \in \mathscr{C}^\infty(M)$ está dada por $\hat{J}(u)(x) = \langle J(x),u\rangle$ para todo $x \in M$. J se denomina la aplicación momento.

Nota 1.32. *Notar que una acción hamiltoniana es siempre Poisson. El recíproco no es cierto siempre: por ejemplo, para $\mathbb{R}^2$ con el corchete dado por $\{x,y\} = x$, la acción de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^2$ dada por $((x,y),t) \mapsto (x,y+t)$ es Poisson pero no hamiltoniana. De hecho, $\Pi = x\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$ es preservado por $\frac{\partial}{\partial y}$ pero este campo no es hamiltoniano.*

La condición de ser equivariante aparece porque queremos obligar a que $\hat{J} : \mathfrak{g} \to \mathscr{C}^\infty(M)$ sea un morfismo de álgebras de Lie, i. e.,

$$\hat{J}([u,v]_{\mathfrak{g}}) = \{\hat{J}(u),\hat{J}(v)\}, \qquad u,v \in \mathfrak{g}.$$

Además, en este caso podemos relacionar las estructuras de Poisson de $\mathfrak{g}^*$ y M mediante la aplicación momento J.

Proposición 1.33. *Si $J\colon M \to \mathfrak{g}^*$ es una aplicación momento para una acción hamiltoniana sobre una variedad de Poisson M, entonces J es una aplicación Poisson.*

Recíprocamente, si $J\colon M \to \mathfrak{g}^*$ es una aplicación de Poisson, entonces la aplicación $\mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$, $u \mapsto X_{\hat{J}(l_u)}$, donde $l_u \in \mathscr{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ es la función lineal asociada a $u \in \mathfrak{g}$, es una acción infinitesimal hamiltoniana con aplicación momento J. Si J es completo, entonces esta acción se puede integrar a una acción hamiltoniana del grupo de Lie G conexo y simplemente conexo que integra a $\mathfrak{g}$.

Ejemplo 1.34. *Sea $H\colon M \to \mathbb{R}$ en una variedad de Poisson con un campo de vectores hamiltoniano completo. Entonces, H se puede ver como una aplicación momento en M, donde la acción de $\mathbb{R}$ en M es el flujo hamiltoniano de H.*

Ejemplo 1.35. *Dado un grupo de Lie conexo G, este actúa sobre $M = \mathfrak{g}^*$ mediante la acción coadjunta. Esta acción es hamiltoniana con $J = Id\colon \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ (ver Ejemplo 1.21). Más generalmente, la acción coadjunta se puede restringir a una acción en las órbitas coadjuntas $\mathscr{O}$ (las hojas simplécticas de $\mathfrak{g}^*$), que es hamiltoniana con aplicación momento $\iota : \mathscr{O} \to \mathfrak{g}^*$ la inclusión.*

Ejemplo 1.36. *Consideremos de nuevo el Ejemplo 1.30. Esta acción es hamiltoniana con aplicación momento $T^*G \to \mathfrak{g}^*$, $\mu_g \mapsto (L_g)^*(\mu_g)$.*

Nota 1.37. *Un estudio sobre la equivarianza de la aplicación momento se puede encontrar, por ejemplo, en* [14, Section 12.3].

Una de las ventajas de la existencia de la aplicación momento es que nos permite hacer una reducción “más grande” de la variedad de Poisson [13].

Proposición 1.38. *Sea una acción hamiltoniana de un grupo de Lie G con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, sobre una variedad de Poisson M con aplicación momento equivariante $J\colon M \to \mathfrak{g}^*$. La acción de G se puede restringir a $J^{-1}(0)$ (por la equivarianza). Si esta acción es libre y propia, entonces la variedad $M//G = J^{-1}(0)/G$ tiene una única estructura de Poisson natural, llamada la* estructura de Poisson reducida.

DEMOSTRACIÓN. Como la acción de G en $J^{-1}(0)$ es libre, su acción infinitesimal también es libre, i. e., $u_M(x) \neq 0$ para todo $0 \neq u \in \mathfrak{g}$, $x \in J^{-1}(0)$. Esto implica que $dJ(x)\colon T_xM \to T_{J(x)}\mathfrak{g}^*$ es sobreyectiva para todo $x \in J^{-1}(0)$. En particular, 0 es un valor regular de la aplicación momento y $J^{-1}(0)$ es una subvariedad cerrada de M.

Sean $f, g \in \mathscr{C}^\infty(J^{-1}(0)/G)$, vistas como funciones G-invariantes en $J^{-1}(0)$. Extendamos estas funciones a dos funciones G-invariantes $\tilde{f}, \tilde{g}$ en un entorno de $J^{-1}(0)$ en M. Como la estructura de Poisson es G-invariante, el corchete de Poisson $\{\tilde{f}, \tilde{g}\}$ es también G-invariante. Se puede ver que la restricción de $\{\tilde{f}, \tilde{g}\}$ depende solo de f y g, pero no de las extensiones $\tilde{f}, \tilde{g}$. Definimos entonces el corchete de Poisson de f y g en $J^{-1}(0)/G$ como la proyección de $\{\tilde{f}, \tilde{g}\}_{|J^{-1}(0)}$ a $J^{-1}(0)/G$. □

Proposición 1.39. *En las hipótesis de la Proposición anterior, la inclusión $M//G \to M/G$ es un morfismo de Poisson. Cuando M es una variedad simpléctica, entonces $M//G$ es una hoja simpléctica de M/G.*

2. ALGEBROIDES DE LIE

Las estructuras de Poisson están íntimamente relacionadas con la teoría de algebroides de Lie. Veremos en esta sección cómo muchas propiedades de las variedades de Poisson se pueden reinterpretar en este contexto partiendo de que toda variedad de Poisson tiene asociada una estructura de algebroide de Lie en su fibrado cotangente.

2.1. Definición y ejemplos.

Definición 2.1. *Sea $A \to M$ un fibrado vectorial. Una estructura de* algebroide de Lie *en A es un par $(\rho, [\cdot,\cdot])$, donde*

1. *$\rho : A \to TM$ es un morfismo de fibrados vectoriales, denominado* el ancla*,*
2. *un corchete de Lie $[\cdot,\cdot]$ en el espacio de las secciones $\Gamma(A)$ de A,*

que satisface una regla de Leibniz:

$$[\alpha, f\beta] = f[\alpha,\beta] + \rho(\alpha)(f)\,\beta, \qquad (\alpha,\beta \in \Gamma(A),\ f \in \mathscr{C}^\infty(M)).$$

Notar que también hemos denotado por ρ la aplicación $\Gamma(A) \to \Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ inducida entre los módulos.

De la definición de algebroide de Lie se deduce inmediatamente que el ancla es un morfismo de álgebras de Lie entre $\Gamma(A)$ y $\mathfrak{X}(M)$, i. e.,

$$\rho([X,Y]) = [\rho(X),\rho(Y)], \qquad (X,Y \in \Gamma(A)).$$

Si fijamos coordenadas locales $(x^1,\dots,x^m)$ en un entorno U de M donde A admite una base local de secciones $\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$, tenemos que

$$\rho(\alpha_s) = \sum_{i=1}^{m} \rho_s^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad (s=1,\dots,r),$$

$$[\alpha_s,\alpha_t] = \sum_{u=1}^{r} c_{st}^u \alpha_u, \qquad (s,t=1,\dots,r),$$

donde $\rho_s^i, c_{st}^u \in \mathscr{C}^\infty(U)$ son las *constantes de estructura* (locales).

Ejemplos 2.2. 1. *Cualquier álgebra de Lie (finito-dimensional) es un algebroide de Lie sobre un punto. Más generalmente, fibrados de álgebras de Lie son ejemplos de algebroides de Lie.*
2. *Dada una variedad M arbitraria, el fibrado tangente $TM \to M$ es un algebroide de Lie, donde el ancla es id_{TM} y el corchete de secciones es el corchete de Lie de campos de vectores.*

Ejemplo 2.3. *Sea $\rho_M : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ una acción infinitesimal de un álgebra de Lie en una variedad, i. e., ρ_M es un morfismo de álgebras de Lie. El* algebroide de Lie de transformaciones *asociado a ρ_M es el fibrado trivial $M \times \mathfrak{g} \to M$ con aplicación ancla definida por $\rho(x,u) = \rho_M(u)(x)$ y con el corchete de Lie*

$$[u,v](x) = [u(x),v(x)]_{\mathfrak{g}} + (\rho_M(u(x))(v))(x) - (\rho_M(v(x))(u))(x),$$

donde estamos identificando $u \in \Gamma(M \times \mathfrak{g})$ con una función $\mathfrak{g}$-valuada $u\colon M \to \mathfrak{g}$.

Ejemplo 2.4. *Sea $P \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado principal con grupo de estructura G. La acción de G sobre P la podemos levantar a TP y el cociente TP/G es un fibrado vectorial sobre M. El espacio de las secciones $\Gamma(TP/G)$ puede ser identificado con el álgebra de Lie de campos G-invariantes en P. Además, el ancla $\rho\colon TP/G \to TM$ se induce de $d\pi$ (más precisamente, dados $p \in P$ y $[v] \in (TP/G)_m$, $\rho([v]) = d\pi(v)$). Con este ancla y este corchete TP/G es un algebroide de Lie denominado el* algebroide de Atiyah *del fibrado principal.*

El último ejemplo que vamos a considerar viene de las variedades de Poisson.

Ejemplo 2.5. *Sea (M,Π) una variedad de Poisson. Entonces, el fibrado cotangente T^*M está dotado de una estructura de algebroide de Lie donde el ancla es el morfismo $\Pi^\sharp$ y el corchete en las 1-formas $\Gamma(T^*M) = \Omega^1(M)$ viene dado por*

$$[\alpha,\beta] = \mathscr{L}_{\Pi^\sharp\alpha}\beta - \mathscr{L}_{\Pi^\sharp\beta}\alpha - d(\Pi(\alpha,\beta)), \tag{20}$$

para $\alpha,\beta \in \Omega^1(M)$.

Notas 2.6. 1. *Para cualquier par de funciones $f,g \in \mathscr{C}^\infty(M)$ se deduce que $[df,dg] = d\{f,g\}$.*

2. *En coordenadas locales, si* $\alpha = \alpha_i dx^i$ *y* $\beta = \beta_i dx^i$*, entonces*

$$[\alpha,\beta]_i = \Pi^{kj}\alpha_j \frac{\partial \beta_i}{\partial x_j} - \Pi^{kj}\beta_k \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Pi^{ik}}{\partial x_j}\alpha_j\beta_i.$$

Existe otra relación con las estructuras de Poisson que generaliza la Proposición 1.6.

Proposición 2.7. *Sea* $([\cdot,\cdot],\rho)$ *una estructura de algebroide de Lie en un fibrado vectorial* $A \to M$*. Entonces, existe una estructura de Poisson lineal* $\{\cdot,\cdot\}_{A^*}$ *en el fibrado vectorial dual* $A^* \to M$*.*

Recíprocamente, dado un fibrado vectorial $A^* \to M$ *con una estructura de Poisson lineal* $\{\cdot,\cdot\}_{A^*}$*, se puede construir una estructura de algebroide de Lie en* $A \to M$*. Ambas construcciones son inversas una de la otra.*

DEMOSTRACIÓN. (Idea). La clave de la demostración está en la correspondencia que existe entre secciones de un fibrado vectorial y funciones lineales del fibrado vectorial dual. De hecho, si $X \in \Gamma(A)$ entonces $l_X \in \mathscr{C}^\infty(A^*)$ es la función lineal definida por

$$l_X(\alpha_m) = \langle \alpha_m, X(m)\rangle, \qquad (\alpha_m \in A^*_m).$$

Ahora, si (x^i) son coordenadas en la base M e $(y_1,\dots,y_r)$ son coordenadas lineales en la fibra de A^* asociadas a una base local $\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$, entonces

$$\begin{aligned}
\{y_s, y_t\}_{A^*} &= \sum_{u=1}^{r} C^u_{st} y_u,\\
\{y_s, x^i\}_{A^*} &= \rho^i_s,\\
\{x^i, x^j\}_{A^*} &= 0.
\end{aligned}$$

La expresión local de Π_{A^*} es

$$\Pi_{A^*} = \sum_{s<t}\sum_u c^u_{st} y_u \frac{\partial}{\partial y_s}\wedge\frac{\partial}{\partial y_t} + \sum_{i,s}\rho^i_s \frac{\partial}{\partial y_s}\wedge\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{21}$$

Por otra parte, si $\{\cdot,\cdot\}_{A^*}$ es lineal en A^*, se puede probar que dadas una función $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ y una sección $X \in \Gamma(A)$, existe una función $g \in \mathscr{C}^\infty(M)$ tal que

$$\{l_X, f\circ\pi_*\} = g\circ\pi_*,$$

donde $\pi_* : A^* \to M$ es la proyección fibrada. Así, el corchete y el ancla están caracterizados por

$$\begin{aligned}
l_{[X,Y]} &= \{l_X, l_Y\}_{A^*},\\
\rho(X)(f)\circ\pi_* &= \{l_X, f\circ\pi\}_{A^*}.
\end{aligned}$$

□

Ejemplos 2.8. *1. Si* $\mathfrak{g}$ *es un álgebra de Lie, recuperamos la correspondencia de la Proposición 1.6.*

2. Para la estructura de algebroide de Lie en $TM \to M$*, usando* (21) *deducimos que la estructura de Poisson lineal en* T^*M *es la asociada a la estructura simpléctica canónica, es decir*

$$\Pi_{T^*M} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial p_i}\wedge\frac{\partial}{\partial q^i}.$$

3. Si (M,Π) *es una variedad de Poisson y consideramos el algebroide de Lie en* T^*M*, la estructura de Poisson inducida en* TM *es el denominado levantamiento completo* Π^c *de* Π *al fibrado tangente* TM [4].

Veamos ahora algunas propiedades que poseen los algebroides de Lie.

Proposición 2.9. *Sea* $([\cdot,\cdot],\rho)$ *una estructura de algebroide de Lie en un fibrado vectorial* $A \to M$*. La distribución (singular)* $\mathscr{D}\colon x \in M \mapsto \mathscr{D}_x = \operatorname{Im}\rho(x) \subseteq T_xM$*, denominada la* distribución característica *de* A*, es una distribución completamente integrable, es decir, para cada punto* $x \in M$ *existe una subvariedad inmersa* L*, llamada la* órbita *de* A *a través de* x*, tal que* $T_xL = \mathscr{D}_x$*.*

Definición 2.10. *Si la dimensión de* $\operatorname{Im}\rho$*, llamada el* rango de ρ*, es localmente constante, se dice que el algebroide* A *es* regular*. Si* $\rho(A) = TM$ *(con lo que hay una única órbita: la variedad* M*), entonces el algebroide es* transitivo.

Ejemplos 2.11. *1. Si* (M,Π) *entonces* $\rho = \Pi^\sharp$*. Por tanto, las órbitas del algebroide cotangente* T^*M *son las hojas simplécticas de* M *(ver apartado 1 de Notas 1.20).*

2. Sea una acción de un grupo de Lie G *sobre una variedad* M *con la correspondiente acción infinitesimal* $\rho_M : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$*. Si* $M \times \mathfrak{g} \to M$ *es el algebroide de Lie de transformaciones asociado a* ρ_M*, entonces las órbitas del algebroide son las órbitas de la acción.*

3. Sea $P \xrightarrow{\pi} M$ *un fibrado principal con grupo de estructura* G*. El algebroide de Atiyah asociado es un algebroide de Lie transitivo, porque el ancla es la aplicación inducida por* $d\pi\colon TP \to TM$*, que es una sumersión.*

Proposición 2.12. *Sean* $(A,[\cdot,\cdot],\rho)$ *un algebroide de Lie sobre* M *y* $x \in M$*. Entonces* $\ker\rho(x) \subseteq A_x$ *está dotada de una estructura de álgebra de Lie, denominada* álgebra de Lie de isotropía*.*

DEMOSTRACIÓN. Si $u,v \in \ker\rho(x)$, definimos $[u,v]$ como

$$[u,v] = [\alpha,\beta](x),$$

donde $\alpha,\beta \in \Gamma(A)$ tal que $\alpha(x) = u$ y $\beta(x) = u$.

Si $\alpha' \in \Gamma(A)$ es otra sección que satisface $\alpha'(x) = u$, tomando una base local de sección $\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$ existen funciones $f_1,\dots,f_r$ que se anulan en x tales que $\alpha - \alpha' = \sum_{i=1}^r f_i\alpha_i$. Entonces,

$$[\alpha-\alpha',\beta](x) = \sum_{i=1}^r f_i(x)[\alpha_i,\beta](x) - \sum_{i=1} \rho(\beta)(x)(f_i)\alpha_i(x) = 0,$$

con lo que $[\cdot,\cdot]$ está bien definido. □

Ejemplos 2.13. *1. Sea* (M,Π) *una variedad de Poisson y* T^*M *el algebroide cotangente asociado. En este caso, la construcción del álgebra de Lie de isotropía generaliza* (19) *cuando* $\Pi(x) = 0$*. Notar que si* L *es la hoja simpléctica por* x*, entonces* $\ker\Pi^\sharp(x) = (T_xL)^o$*, es decir, el anulador de* T_xL *es* $\ker\Pi^\sharp(x)$*.*

2. Si TP/G *es el algebroide de Atiyah asociado a un fibrado principal,* $[v] \in TP/G$ *pertenece al núcleo del ancla si y solo si* $d\pi(v) = 0$*, i. e.,* v *es vertical. Pero sabemos que* $V\pi \cong \mathfrak{g}$*, de lo que podemos concluir que* $\ker\rho(x) \cong \mathfrak{g}$*.*

3. Si $M \times \mathfrak{g} \to M$ *es el algebroide de Lie de transformaciones asociado a una acción infinitesimal* ρ_M*, claramente se tiene que* $\ker\rho(x)$ *es precisamente el álgebra de isotropía de la acción en* x*.*

2.2. Cálculo en algebroides de Lie. En esta sección, vamos a desarrollar un cálculo para algebroides de Lie que es análogo al cálculo de Cartan usual en formas diferenciales de una variedad.

Dado un algebroide de Lie $(A,[\cdot,\cdot],\rho)$, se define la *diferencial exterior* $d_A:\Gamma(\wedge^\bullet A^*)\to\Gamma(\wedge^{\bullet+1}A^*)$ por

$$\begin{aligned} d_A Q(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_r) &= \sum_{i=0}^{r}(-1)^i\rho(\alpha_i)(Q(\alpha_0,\ldots,\hat{\alpha}_i,\ldots,\alpha_r)) \\ &\quad+\sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}Q([\alpha_i,\alpha_j],\alpha_0,\ldots,\hat{\alpha}_i,\ldots,\hat{\alpha}_j,\ldots,\alpha_r), \end{aligned} \tag{22}$$

donde $\alpha_0,\ldots,\alpha_r\in\Gamma(A)$.

Esta diferencial satisface las siguientes propiedades:

$$d_A^2 Q = 0, \tag{23}$$

$$d_A(Q_1\wedge Q_2) = d_A Q_1\wedge Q_2 + (-1)^{\deg Q_1} Q_1\wedge d_A Q_2. \tag{24}$$

Si uno hace las cuentas, puede ver que dada una función $f\in\mathscr{C}^\infty(M)$ se tiene que $d_f^2=0$ es equivalente a que el ancla ρ sea un morfismo de álgebras de Lie, y para $Q\in\Gamma(\wedge A^*)$, $d_A^2 Q=0$ si y solo si se tiene la identidad de Jacobi para $[\cdot,\cdot]$. La derivación se tiene a partir de la regla de Leibniz.

La cohomología asociada con d_A se denomina la *cohomología del algebroide de Lie A* (con coeficientes triviales) y se denota por $H^\bullet(A)$.

Se puede probar el siguiente resultado en la dirección inversa.

Proposición 2.14. *Existe una correspondencia uno a uno entre estructuras de algebroide de Lie* $([\cdot,\cdot],\rho)$ *en un fibrado vectorial* $A\to M$ *y estructuras de álgebra diferencial graduada en* $(\oplus_{k>0}\Gamma(\wedge^k A^*),\wedge,d)$*, es decir un operador* $d:\Gamma(\wedge^\bullet A^*)\to\Gamma(\wedge^{\bullet+1}A^*)$ *que satisface:*

$$d^2 Q = 0,$$
$$d(Q_1\wedge Q_2) = dQ_1\wedge Q_2 + (-1)^{\deg Q_1} Q_1\wedge dQ_2.$$

DEMOSTRACIÓN. (Idea). Una dirección es la construcción de la diferencial del algebroide de Lie que hemos mencionado anteriormente.

Recíprocamente, dada una estructura de álgebra diferencial graduada con diferencial d, entonces las ecuaciones

$$\rho(\alpha)(f) = \langle df,\alpha\rangle,$$

y

$$\langle Q,[\alpha,\beta]\rangle = \rho(\alpha)(\langle Q,\beta\rangle) - \rho(\beta)(\langle Q,\alpha\rangle) - dQ(\alpha,\beta),$$

para $f\in\mathscr{C}^\infty(M)$, $Q\in\Gamma(\wedge^* A)$ y $\alpha,\beta\in\Gamma(A)$ definen una estructura de algebroide de Lie en A. □

Veamos qué ocurre en nuestros ejemplos de algebroide de Lie.

Ejemplos 2.15.

1. *Si* $A=\mathfrak{g}$ *es un álgebra de Lie de dimensión finita, entonces las multisecciones del fibrado dual son* $\Gamma(\wedge^k A^*)=\wedge^k\mathfrak{g}^*$ *y* $d_{\mathfrak{g}}:\wedge^k\mathfrak{g}^*\to\wedge^{k+1}\mathfrak{g}^*$ *es el operador de cohomología de Chevalley-Eilenberg del álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *con coeficientes triviales.*
2. *Dada una variedad* M *y su algebroide tangente* TM*, las secciones del fibrado dual son las formas en* M*, y de la expresión* (22) *tenemos que* d_{TM} *es la diferencial de de Rham.*

Sea (M,Π) una variedad de Poisson y consideremos la estructura de algebroide asociada en T^*M. El siguiente resultado muestra que la cohomología del algebroide es precisamente el operador de cohomología Poisson que habíamos obtenido anteriormente.

Proposición 2.16. *Sea* (M,Π) *una variedad de Poisson. Entonces la diferencial del algebroide* T^*M*,* $d_{T^*M} : \Gamma(\wedge^\bullet TM) \to \Gamma(\wedge^{\bullet+1}TM)$ *viene dada por*

$$d_{T^*M}Q = [\Pi, Q] = d_\Pi Q.$$

DEMOSTRACIÓN. Solamente tenemos que mostrar que d_{T^*M} y d_Π coinciden para funciones y campos de vectores.

Dada una función $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, de (22) tenemos que

$$d_{T^*M}f(\alpha) = \Pi^\sharp(\alpha)(f) = -\langle X_f, \alpha\rangle,$$

para todo $\alpha \in \Omega^1(M)$. Es decir, $d_{T^*M}f = -X_f = d_\Pi f$.

Sea ahora un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dadas dos funciones $f, g = \mathscr{C}^\infty(M)$,

$$\begin{aligned} d_\Pi X(df,dg) &= -[X,\Pi](df,dg) \\ &= -X(\Pi(df,dg)) + \Pi(d(X(f)),dg)) + \Pi(df,d(X(g))) \\ &= -X(d\{f,g\}) - \Pi^\sharp(dg)(X(f)) + \Pi^\sharp(df)(X(g)) \\ &= -X([df,dg]) - \rho(dg)(X(f)) + \rho(df)(X(g)) \\ &= d_{T^*M}X(df,dg), \end{aligned}$$

donde hemos usado la definición de la derivada de Lie por un campo de vectores y que $d\{f,g\} = [df,dg]$. $\square$

Utilizando la diferencial se puede dar una definición de morfismo de algebroides de Lie.

Definición 2.17. *Sean* $A_1 \to M_1$ *y* $A_2 \to M_2$ *dos algebroides de Lie. Un morfismo de fibrados vectoriales* $\Phi\colon A_1 \to A_2$ *sobre* $\phi\colon M_1 \to M_2$ *se dice que es un* morfismo de algebroides de Lie *si*

$$\Phi^* \circ d_{A_2} = d_{A_1} \circ \Phi^*,$$

donde d_{A_1} *(respectivamente,* d_{A_2}*) es la diferencial del algebroide de Lie* A_1 *(respectivamente,* A_2*) y* $\Phi^* : \Gamma(\wedge^\bullet A_2^*) \to \Gamma(\wedge^\bullet A_1^*)$ *es la aplicación traspuesta entre secciones, i. e.,*

$$\Phi^*Q(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)(x) = Q(\phi(x))(\Phi(\alpha_1(x)),\ldots\Phi(\alpha_k(x))),$$

para $Q \in \Gamma(\wedge^k A_2^*)$*,* $\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in \Gamma(A_1)$*.*

Por otra parte, imitando la construcción de la Sección 1.3, se puede extender el corchete de Lie de las secciones de A al llamado *corchete de Schouten* en el espacio $\Gamma(\wedge^\bullet A) = \oplus_k \Gamma(\wedge^k A)$ de las multisecciones de A. Es un corchete

$$[\cdot,\cdot] : \Gamma(\wedge^p A) \otimes \Gamma(\wedge^q A) \to \Gamma(\wedge^{p+q-1} A),$$

caracterizado por las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} &[\alpha,\beta] = \text{corchete de secciones}, \qquad (\alpha,\beta \in \Gamma(A)), \\ &[\alpha,f] = \rho(\alpha)(f), \qquad (\alpha \in \Gamma(A), f \in \mathscr{C}^\infty(M)), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} &[\Theta,\Upsilon] = -(-1)^{(p-1)(q-1)}[\Upsilon,\Theta], \\ &[\Theta,\Upsilon\wedge\Omega] = [\Theta,\Upsilon]\wedge\Omega + (-1)^{(p-1)q}\Upsilon\wedge[\Theta,\Omega], \\ &(-1)^{(p-1)(r-1)}[\Theta,[\Upsilon,\Omega]] + (-1)^{(q-1)(p-1)}[\Upsilon,[\Omega,\Theta]] + (-1)^{(r-1)(q-1)}[\Omega,[\Theta,\Upsilon]] = 0, \end{aligned}$$

para todo $\Theta \in \Gamma(\wedge^p A)$, $\Upsilon \in \Gamma(\wedge^q A)$ y $\Omega \in \Gamma(\wedge^r A)$.

Dado $\alpha \in \Gamma(A)$, podemos definir la *derivada de Lie* de una multisección de A^* como el conmutador de la diferencial y la contracción por α, esto es,

$$\mathscr{L}_\alpha = d_A \circ i_\alpha + i_\alpha \circ d_A.$$

Esta derivada de Lie satisface propiedades análogas a la derivada de Lie de campos de vectores en una variedad:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{[\alpha,\beta]} &= \mathscr{L}_\alpha \mathscr{L}_\beta - \mathscr{L}_\beta \mathscr{L}_\alpha, \\ \mathscr{L}_{f\alpha} Q &= f \mathscr{L}_\alpha Q + d_A f \wedge (i_\alpha Q), \\ \mathscr{L}_\alpha (fQ) &= f \mathscr{L}_\alpha Q + \rho(\alpha)(f) Q, \end{aligned}$$

para $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, $\alpha \in \Gamma(A)$ y $Q \in \Gamma(\wedge^\bullet A)$.

2.3. Acción de un algebroide en una aplicación diferenciable. Sea $([\cdot,\cdot],\rho)$ un algebroide de Lie sobre una variedad M y $\pi : P \to M$ una aplicación diferenciable. Una *acción* de A en $\pi : P \to M$ es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal

$$* : \Gamma(A) \to \mathfrak{X}(P), \quad \alpha \in \Gamma(A) \mapsto \alpha^* \in \mathfrak{X}(P),$$

tal que:

$$(f\alpha)^* = (f \circ \pi)\alpha^*, \quad [\alpha,\beta]^* = [\alpha^*,\beta^*], \quad d\pi(p)(\alpha^*(p)) = \rho(\alpha(\pi(p))),$$

para $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, $\alpha,\beta \in \Gamma(A)$ y $p \in M$. Si $* : \Gamma(A) \to \mathfrak{X}(P)$ es una acción de A sobre $\pi : P \to M$, y $\tau : A \to M$ es la proyección, entonces el fibrado vectorial pullback de A sobre π,

$$\pi^* A = \{(a,p) \in A \times P \,|\, \tau(a) = \pi(p)\},$$

es un algebroide de Lie sobre P con $([\cdot,\cdot]_\pi,\rho_\pi)$ caracterizados por

$$[\alpha,\beta]_\pi = [\alpha,\beta] \circ \pi, \qquad \rho_\pi(\alpha)(p) = \alpha^*(p),$$

para $\alpha,\beta \in \Gamma(A)$ y $p \in P$. El triple $(\pi^* A, [\cdot,\cdot]_\pi, \rho_\pi)$ se denomina el *algebroide de Lie acción de A en π*, y se denota por $A \ltimes \pi$ o $A \ltimes P$ (ver [12]).

Ejemplo 2.18. *Si (M,Π_M) y (N,Π_N) son variedades de Poisson y $J : M \to N$ es una aplicación de Poisson entre dos variedades de Poisson, entonces $T^*N \to N$ actúa sobre J mediante la aplicación*

$$\alpha^* = \Pi^\sharp(J^*\alpha), \qquad (\alpha \in \Omega^1(N)).$$

2.4. Estructura local de algebroides de Lie. Al igual que hicimos con las variedades de Poisson en el Teorema 1.22, dado un algebroide de Lie cualquiera, se pueden elegir coordenadas apropiadas que simplifican las funciones de estructura del algebroide.

Teorema 2.19. *(Splitting local)* [9]. *Sean $([\cdot,\cdot],\rho)$ un algebroide de Lie en un fibrado vectorial $A \to M$ y $x_0 \in M$ con rango de $\rho(x_0) = h$. Entonces, existen coordenadas (x^i, y^j) $(i = 1,\dots,h,\ j = h+1,\dots,m)$ en un entorno U de x_0, y una base de secciones $(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ de A sobre U, tales que:*

$$\begin{aligned} \rho(\alpha_i) &= \frac{\partial}{\partial x^i}, & (i = 1,\dots,h), \\ \rho(\alpha_s) &= \sum_j \rho_j^s \frac{\partial}{\partial y^j}, & (s = h+1,\dots r), \end{aligned}$$

donde $\rho_j^s \in \mathscr{C}^\infty(U)$ *son funciones diferenciables que dependen solo de las variables* (y^j) *y que se anulan en* x_0*:* $\rho_j^s = \rho_j^s(y^j)$*,* $\rho_j^s(0) = 0$*. Además,* $[\alpha_s, \alpha_t] = \sum_u c_{st}^u \alpha_u$*, donde* $c_{st}^u \in \mathscr{C}^\infty(U)$ *se anulan para* $u \leq h$ *y satisfacen*

$$\sum_{u>h} \frac{\partial c_{st}^u}{\partial x^i} \rho_j^u = 0.$$

Nota 2.20. *Notar que el teorema anterior no es el Teorema 1.22 para la variedad de Poisson lineal en* A^**. Esto se debe a que los cambios que hacemos son de coordenadas en* M *y de secciones de* A*, que llevaría a cambios de coordenadas en* A^* *que son lineales en las fibras.*

3. Grupoides de Lie

3.1. Definición y ejemplos. Los objetos globales que se corresponden con los algebroides de Lie son los grupoides de Lie. En esta sección recordaremos la definición y algunas generalidades sobre ellos. También discutiremos algunos ejemplos interesantes. Las referencias básicas que usaremos son [1, 12].

Definición 3.1. *Un* grupoide *consiste en dos conjuntos* G *y* M *(llamados respectivamente el* grupoide *y la* base*), junto con dos aplicaciones* $\mathbf{s}, \mathbf{t} \colon G \to M$ *(llamadas proyección* source *y* target *respectivamente), una* multiplicación parcial $\mathbf{m} : G^{(2)} = \{(g,h) \in G \times G \,|\, \mathbf{s}(g) = \mathbf{t}(h)\} \to G$*, una* aplicación unidad $\varepsilon \colon M \to G$*, y una aplicación* inversión $\iota : G \to G$*, que satisfacen las siguientes condiciones:*

i) $\mathbf{s}(\mathbf{m}(g,h)) = \mathbf{s}(h)$ *y* $\mathbf{t}(\mathbf{m}(g,h)) = \mathbf{t}(g)$*, para todo* $(g,h) \in G^{(2)}$*,*
ii) $\mathbf{m}(g, \mathbf{m}(h,k)) = \mathbf{m}(\mathbf{m}(g,h),k)$*, para todo* $g,h,k \in G$ *tal que* $\mathbf{s}(g) = \mathbf{t}(h)$ *y* $\mathbf{s}(h) = \mathbf{t}(k)$*,*
iii) $\mathbf{s}(\varepsilon(x)) = x$ *y* $\mathbf{t}(\varepsilon(x)) = x$*, para todo* $x \in M$*,*
iv) $\mathbf{m}(g, \varepsilon(\mathbf{s}(g))) = g$ *y* $\mathbf{m}(\varepsilon(\mathbf{t}(g)), g) = g$*, para todo* $g \in G$*,*
v) $\mathbf{m}(g, \iota(g)) = \varepsilon(\mathbf{t}(g))$ *y* $\mathbf{m}(\iota(g), g) = \varepsilon(\mathbf{s}(g))$*, para todo* $g \in G$*.*

Un grupoide G *con base* M *lo denotaremos por* $G \rightrightarrows M$*.*

Si G y M son variedades, $G \rightrightarrows M$ es un *grupoide de Lie* si:

i) $\mathbf{s}$ y $\mathbf{t}$ son sumersiones.
ii) $\mathbf{m}$, ε y ι son aplicaciones diferenciables.

De *i)* y *ii)*, se sigue que $\mathbf{m}$ es una sumersión, ε es una inmersión y ι es un difeomorfismo. De hecho, $\iota^2 = Id$.

A partir de ahora, denotaremos $\mathbf{m}(g,h)$ por gh, $\iota(g)$ por $g-1$ y $\varepsilon(x)$ por 1_x.

Ejemplo 3.2. *Cualquier grupo de Lie* G *es un grupoide de Lie sobre un punto* $\mathfrak{e}$*, el elemento identidad de* G*.*

Ejemplo 3.3. *Sea* M *una variedad diferenciable. La variedad producto* $M \times M$ *es un grupoide de Lie sobre* M *de la siguiente manera:* $\mathbf{s}$ *es la proyección en el segundo factor,* $\mathbf{t}$ *es la proyección en el primer factor,* $1_x = (x,x)$ *para todo* $x \in M$*, y* $(x,y)(y,z) = (x,z)$*.* $M \times M \rightrightarrows M$ *se denomina el* grupoide banal.

Ejemplo 3.4. *Sea* $\pi \colon E \to M$ *un fibrado vectorial. Entonces* $E \rightrightarrows M$ *es un grupoide donde* $\mathbf{s} = \mathbf{t} = \pi$ *y la multiplicación parcial es la adición en las fibras. Esto se podría generalizar a un fibrado de grupos de Lie, es decir, una fibración* $\pi : E \to M$ *donde cada fibra* $\pi-1(x)$ *está dotada de estructura de grupo de Lie.*

Ejemplo 3.5. *Si* $G_1 \rightrightarrows M_1$ *y* $G_2 \rightrightarrows M_2$ *son grupoides de Lie, entonces* $G_1 \times G_2 \rightrightarrows M_1 \times M_2$ *es un grupoide de Lie de manera natural.*

Ejemplo 3.6. *Sea G un grupo de Lie que actúa sobre una variedad diferenciable M. Entonces, $G\times M$ es un grupoide de Lie sobre M, denominado el* grupoide acción*, tomando*

$$\begin{aligned}&\mathbf{s}(p,g)=p\cdot g, \quad \mathbf{t}(p,g)=p,\\ &\mathbf{m}((p,g),(q,h))=(p,gh), \text{ si } q=p\cdot g,\\ &1_p=(p,\mathfrak{e}), \quad (p,g)^{-1}=(p\cdot g,g-1).\end{aligned}$$

Unas propiedades básicas de los grupoides son las siguientes.

Proposición 3.7. *Sea $G\rightrightarrows M$ un grupoide de Lie. Entonces,*

1. *Para cada $x\in M$, $\mathbf{s}^{-1}(x)$ y $\mathbf{t}^{-1}(x)$ son subvariedades embebidas cerradas en G. Además, $\mathbf{t}_x : s^{-1}(x)\to M$ (respectivamente, $\mathbf{s}_x : \mathbf{t}^{-1}(x)\to M$) tiene rango constante.*
2. *Para cada $x\in M$, $G(x)=\mathbf{s}^{-1}(x)\cap\mathbf{t}^{-1}(x)$ es un grupo de Lie, denominado el* grupo de Lie de isotropía*.*
3. *Para cada $x\in M$, $\mathscr{O}(x)=\{\mathbf{t}(g)\,|\,g\in G,\mathbf{s}(g)=x\}=\{\mathbf{s}(g)\,|\,g\in G,\mathbf{t}(g)=x\}$ es una subvariedad inmersa de M llamada la* órbita de *x. Además, la partición de M en órbitas determina una foliación singular.*

Veamos ahora cómo construir un algebroide de Lie asociado a un grupoide de Lie. La construcción será análoga a la del álgebra de Lie de un grupo de Lie.

Definición 3.8. *Sean $G\rightrightarrows M$ un grupoide de Lie y $g_0\in G$ con $\mathbf{s}(g_0)=y_0$ y $\mathbf{t}(g_0)=x_0$. La* traslación a derecha por *g_0 es*

$$R_{g_0}:\mathbf{s}^{-1}(x_0)\to\mathbf{s}^{-1}(y_0), \quad h\mapsto R_{g_0}(h)=hg_0.$$

Teniendo en cuenta que las traslaciones a derecha no se pueden definir globalmente, pero sí cuando nos restringimos a las **s**-fibras, podemos definir campos invariantes a derecha de la siguiente manera.

Definición 3.9. *Un multivector P de un grupoide G se dice que es* invariante a derecha *si es tangente a las fibras de* **s** *y $P(gh)=dR_h(g)(P(g))$ para $(g,h)\in G^{(2)}$.*

Proposición 3.10. *Si P y Q son multivectores invariantes a derecha en G, entonces $[P,Q]$ también es invariante a derecha.*

Usando este tipo de campos, construyamos el algebroide de Lie asociado a un grupoide de Lie. Supongamos que $G\rightrightarrows M$ es un grupoide de Lie. Entonces, podemos considerar el fibrado vectorial $A\to M$, cuya fibra en un punto es $A_x=T_{1_x}\mathbf{s}^{-1}(x)$. Se puede interpretar este fibrado como el fibrado vectorial pullback del fibrado vertical a **s**, $V\mathbf{s}\to G$, por la aplicación unidad $\varepsilon\colon M\to G$.

Es fácil probar que existe una biyección entre el espacio $\Gamma(A)$ de secciones de A y el conjunto de campos de vectores invariantes a derecha en G. Si α es una sección de A, el correspondiente campo invariante a derecha en G, que denotaremos por $\overrightarrow{\alpha}$, viene dado por

$$\overrightarrow{\alpha}(g)=dR_g(1_{\mathbf{s}(g)})(\alpha(\mathbf{s}(g))).$$

Usando estos hechos, podemos introducir una estructura de algebroide de Lie $([\cdot,\cdot],\rho)$ en A caracterizada por

$$\overrightarrow{[\alpha,\beta]}=[\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\beta}], \quad \rho(\alpha)(x)=d\mathbf{t}(1_x)(\alpha(x)), \tag{25}$$

para $\alpha,\beta\in\Gamma(A)$ y $x\in M$.

Nota 3.11. *Es conocido que toda álgebra de Lie se puede integrar a un grupo de Lie (tercer teorema de Lie). Sin embargo, esto no es cierto para algebroides de Lie: existen algebroides de Lie que no pueden ser inducidos a partir de algún grupoide de Lie. En* [5]*, se muestra que el problema de integrabilidad está controlado por dos obstrucciones computables.*

Definición 3.12. *Dados dos grupoides de Lie $G \rightrightarrows M$ y $G' \rightrightarrows M'$, un* morfismo de grupoides de Lie *es una aplicación diferenciable $\Phi : G \to G'$ tal que si $(g,h) \in G^{(2)}$ entonces $(\Phi(g),\Phi(h)) \in G'^{(2)}$ y $\Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h)$.*

Un morfismo de grupoides de Lie $\Phi : G \to G'$ induce una aplicación diferenciable $\Phi_0 : M \to M'$ de tal manera que $\mathbf{s}' \circ \Phi = \Phi_0 \circ \mathbf{s}$, $\mathbf{t}' \circ \Phi = \Phi_0 \circ \mathbf{t}$ y $\Phi \circ \varepsilon = \varepsilon' \circ \Phi_0$, siendo $\mathbf{s},\mathbf{t}$ y ε (respectivamente, $\mathbf{s}',\mathbf{t}'$ y ε') las proyecciones y la aplicación unidad en el grupoide $G \rightrightarrows M$ (respectivamente, $G' \rightrightarrows M'$). Si (Φ,Φ_0) es un morfismo entre dos grupoides de Lie $G \rightrightarrows M$ y $G' \rightrightarrows M'$, y $A \to M$ (respectivamente, $A' \to M'$) es el algebroide de Lie de G (respectivamente, G'), entonces (Φ,Φ_0) induce, de manera natural, un morfismo $(A(\Phi),\Phi_0)$ entre los algebroides de Lie A y A' (ver [12]).

Ejemplos 3.13. *1. Dado un grupo de Lie, recuperamos la construcción de su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.*

2. Sea M una variedad diferenciable y $M \times M \rightrightarrows M$ el grupoide banal asociado. Entonces $A(M\times M) \to M$ es isomorfo al fibrado tangente $TM \to M$.

3. Si $E \rightrightarrows M$ es el grupoide de Lie asociado a un fibrado vectorial, entonces el algebroide de Lie asociado es $E \to M$ con la estructura de algebroide trivial. Más generalmente, un fibrado de grupos de Lie induce un fibrado de álgebras de Lie.

4. Si G es un grupo que actúa en una variedad diferenciable M, entonces $A(G\times M)$ es isomorfo al algebroide de Lie de transformaciones $M \times \mathfrak{g}$ que viene de la acción infinitesimal asociada.

3.2. Acción de un grupoide sobre una aplicación diferenciable. Sea $G \rightrightarrows M$ un grupoide de Lie y $\pi : P \to M$ una sumersión sobreyectiva. Si $P * G = \{(p,g) \in P\times G \,|\, \pi(p) = \mathbf{t}(g)\}$ entonces una *acción a derecha* de G en π es una aplicación diferenciable

$$P * G \to P, \quad (p,g) \mapsto p\cdot g,$$

que satisface las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} &\pi(p\cdot g) = \mathbf{s}(g), && ((p,g)\in P*G),\\ &(p\cdot g)\cdot h = p\cdot(gh), && ((g,h)\in G^{(2)}, (p,g)\in P*G),\\ &p\cdot\varepsilon(\pi(p)) = p, && (p\in P). \end{aligned}$$

Dada una acción de este tipo, uno construye el *grupoide acción* $P * G \rightrightarrows P$ definiendo

$$\begin{aligned} &\mathbf{s}'(p,g) = p\cdot g, \quad \mathbf{t}'(p,g) = p,\\ &m'((p,g),(q,h)) = (p,gh), \text{ si } q = p\cdot g,\\ &\varepsilon'(p) = (p,\varepsilon(\pi(p))), \quad \iota'(p,g) = (p\cdot g, g{-}1). \end{aligned}$$

Ahora, si $p \in P$, consideramos la aplicación $p\cdot : \mathbf{t}^{-1}(\pi(p)) \to P$ dada por

$$p\cdot(g) = p\cdot g.$$

Entonces, si A es el algebroide de Lie de G, la aplicación $\mathbb{R}$-lineal

$$* : \Gamma(A) \to \mathfrak{X}(P), \qquad \alpha \in \Gamma(A) \mapsto \alpha^* \in \mathfrak{X}(P),$$

definida por

$$\alpha^*(p) = d(p\cdot)(1_{\pi(p)})(\alpha(\pi(p))),$$

para todo $p \in P$, induce una acción de A en $\pi : P \to M$. Además, el algebroide de Lie asociado al grupoide acción $P * G \rightrightarrows P$ es precisamente el algebroide de Lie acción $A \ltimes \pi$.

3.3. Grupoides simplécticos. Realizaciones Poisson. En esta sección estudiaremos un tipo particular de grupoides de Lie $G \rightrightarrows M$ en los que el espacio total G está dotado de una 2-forma simpléctica compatible con la estructura de grupoide. Mostraremos que este tipo de grupoides están íntimamente relacionados con las variedades de Poisson y sus algebroides cotangentes.

Definición 3.14. *Sea $G \rightrightarrows M$ un grupoide de Lie con una forma simpléctica $\omega \in \Omega^2(G)$. Se dice que $(G \rightrightarrows M, \omega)$ es un* grupoide simpléctico *si*

$$\mathbf{m}^*\omega = \mathrm{pr}_1^*\omega + \mathrm{pr}_2^*\omega, \tag{26}$$

donde $\mathbf{m}\colon G^{(2)} \to G$, $\mathrm{pr}_1\colon G^{(2)} \to G$ y $\mathrm{pr}_2\colon G^{(2)} \to G$ están dadas por $\mathbf{m}(x,y) = xy$, $\mathrm{pr}_1(x,y) = x$, y $\mathrm{pr}_2(x,y) = y$, respectivamente.

Nota 3.15. *La ecuación (26) es equivalente a que el grafo de la multiplicación*

$$\Lambda = \{(x,y,xy) \,|\, (x,y) \in G^{(2)}\} \subset G \times G \times G$$

sea una subvariedad isótropa de $G \times G \times G$ con la estructura simpléctica $(\omega, \omega, -\omega)$, es decir, $i^*(\omega,\omega,-\omega) = 0$, donde $i\colon \Lambda \to G \times G \times G$ es la inclusión. Usando que $\dim(G \times G \times G) = 2\dim\Lambda$, se concluye que $(G \rightrightarrows M, \omega)$ es un grupoide simpléctico si el grafo de la multiplicación Λ es una subvariedad Lagrangiana.

El siguiente resultado se puede ver en [3].

Proposición 3.16. *Sea $(G \rightrightarrows M, \Omega)$ un grupoide simpléctico. Entonces*

1. *M es una subvariedad Lagrangiana de M, es decir, $\varepsilon^*\omega = 0$ y $\dim G = 2\dim M$.*
2. *Las $\mathbf{s}$-fibras y las $\mathbf{t}$-fibras son simplécticamente ortogonales, es decir, $(\ker d\mathbf{s})^{\Omega} = \ker d\mathbf{t}$, donde dada una subvariedad P de (G,Ω) definimos $(T_xP)^{\Omega} = \{u \in T_xG \,|\, \Omega(u,v) = 0, \forall v \in T_xP\}$, para todo $x \in P$.*
3. *Existe una estructura de Poisson en M tal que $\mathbf{s}$ es Poisson.*
4. *$\mathbf{s}$ es una aplicación completa.*
5. *El algebroide de Lie de G es isomorfo a T^*M.*

Veamos ahora ejemplos de grupoides simplécticos.

Ejemplo 3.17. *Si G es un grupo de Lie con una forma multiplicativa, de la Proposición 3.16 1), tenemos que $\omega(\mathfrak{e}) = 0$. Por tanto, no existen formas simplécticas multiplicativas en grupos de Lie.*

Ejemplo 3.18. *Sea (M,ω) una variedad simpléctica. Entonces, el grupoide banal $M \times M \rightrightarrows M$ es un grupoide simpléctico con la forma simpléctica $(\omega, -\omega)$.*

Ejemplo 3.19. *Sea $T^*M \to M$ el fibrado cotangente de una variedad cualquiera. Entonces, $T^*M \rightrightarrows M$ es un grupoide (ver Ejemplo 3.4). Si tomamos la estructura simpléctica canónica Ω_M en T^*M del Ejemplo 1.3, entonces (T^*M, Ω_M) es un grupoide simpléctico y la estructura de Poisson inducida en M es la trivial $\Pi \equiv 0$.*

Ejemplo 3.20. *Sea $G \rightrightarrows M$ un grupoide de Lie. Si A^* es el fibrado dual al algebroide de Lie $A \to M$, entonces el fibrado cotangente T^*G es un grupoide de Lie sobre A^*. Las* *aplicaciones de estructura del grupoide están definidas de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbf{s}}(\mu_g)(X)=\langle \mu_g, dL_g(1_{\mathbf{s}(g)})(X)\rangle, \quad \textit{para } \mu_g\in T_g^*G \textit{ y } X\in A_{\mathbf{s}(g)},\\
&\tilde{\mathbf{t}}(\nu_h)(Y)=\langle \nu_h, dR_h(1_{\mathbf{t}(h)})(Y-d(\varepsilon\circ\mathbf{s})(\mathbf{t}(h))(Y))\rangle, \quad \textit{para } \nu_h\in T_h^*G \textit{ y } Y\in A_{\mathbf{t}(h)},\\
&\langle \mu_g\oplus_{T^*G}\nu_h, d\mathbf{m}(gh)(X_g,Y_h)\rangle=\langle\mu_g,X_g\rangle+\langle\nu_h,Y_h\rangle, \quad \textit{para } (X_g,Y_h)\in T_{(g,h)}G^{(2)},\\
&\langle\tilde{1}(\mu_x),X_{1_x}\rangle=\langle\mu_x, X_{1_x}-d(\varepsilon\circ\mathbf{t})(1_x)(X_{1_x})\rangle, \quad \textit{para } \mu_x\in A_x^* \textit{ y } X_{1_x}\in T_{1_x}G,\\
&\langle\tilde{\iota}(\mu_g),X_{g-1}\rangle=-\langle\mu_g, d\iota(g-1)(X_{g-1})\rangle, \quad \textit{para } \mu_g\in T_g^*G \textit{ y } X_{g-1}\in T_{g-1}G.
\end{aligned} \tag{27}$$

Si tomamos la estructura simpléctica canónica Ω_G en T^*G (ver Ejemplo 1.3), se puede probar que (T^*G,Ω_G) es un grupoide simpléctico. En este caso, la estructura de Poisson en A^* es precisamente la estructura de Poisson lineal inducida del algebroide de Lie A.

En el caso particular en el que G es un grupo de Lie con álgebra de Lie G, $\mathbf{s}\colon T^*G\to\mathfrak{g}^*$ (respectivamente, $\mathbf{t}\colon T^*G\to\mathfrak{g}^*$) es la traslación a izquierda $\nu_g\mapsto L_g^*(\nu_g)$ (respectivamente, la traslación a derecha $\nu_g\mapsto R_g^*(\nu_g)$). Por otra parte, la multiplicación en T^*G está dada por $\mu_g\oplus_{T^*G}\nu_h=R^*_{h^{-1}}\mu_g$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\langle\mu_g\oplus_{T^*G}\nu_h, d\mathbf{m}(X_g,Y_h)\rangle &= \langle\mu_g,X_g\rangle+\langle(R_h)^*(\nu_h), dR_{h^{-1}}(Y_h)\rangle\\
&=\langle\mu_g,X_g\rangle+\langle(L_g)^*(\mu_g), dR_{h^{-1}}(Y_h)\rangle\\
&=\langle R^*_{h^{-1}}\mu_g, dR_hX_g\rangle+\langle R^*_{h^{-1}}\mu_g, dL_g(Y_h)\rangle\\
&=\langle R^*_{h^{-1}}\mu_g, d\mathbf{m}(X_g,Y_h)\rangle,
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $(R_h)^*(\nu_h)=(L_g)^*(\mu_g)$ y

$$d\mathbf{m}(gh)(X_g,Y_h)=dL_g(h)(Y_h)+d(R_h)(g)(X_g).$$

Si tomamos la trivialización $T^*G\to G\times\mathfrak{g}^*$ dada por $\nu_g\mapsto(g,R_g^*(\nu_g))$ (con inversa $(g,\xi)\mapsto R^*_{g^{-1}}\xi$), entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}(g,\xi)&=\mathbf{s}(R^*_{g^{-1}}\xi)=\mathrm{Ad}_g^*\xi,\\
\mathbf{t}(g,\xi)&=\mathbf{t}(R^*_{g^{-1}}\xi)=\xi,\\
(g,\xi)\oplus_{T^*G}(h,\eta)&=(gh,\xi),\ \textit{con } \mathrm{Ad}_g^*\xi=\eta.
\end{aligned}$$

Concluimos que $T^*G\rightrightarrows\mathfrak{g}^*$ es isomorfo al grupoide acción $G\times\mathfrak{g}^*$ asociado a la acción coadjunta de G sobre $\mathfrak{g}^*$.

Veamos ahora un tipo particular de aplicaciones Poisson y su relación con los grupoides simplécticos.

Definición 3.21. *Dada una variedad de Poisson M, una* realización simpléctica *consiste en una variedad simpléctica S junto con una aplicación de Poisson $\phi: S\to M$ que es una sumersión sobreyectiva. Decimos que la realización simpléctica es* completa *si ϕ es completa.*

Ejemplo 3.22. *Las realizaciones simplécticas de $\mathfrak{g}^*$ están formadas por una variedad simpléctica S junto con una aplicación de Poisson $J\colon S\to\mathfrak{g}^*$ que es una sumersión sobreyectiva. Pero vimos en la Proposición 1.33 que esto era equivalente a acciones hamiltonianas de $\mathfrak{g}$ en S.*

El problema de encontrar realizaciones simplécticas fue resuelto por Karasaev [10] y Weinstein et al. [3]. Notar que si G es un grupoide simpléctico sobre M se tiene que $\mathbf{s}: G\to M$ es una realización simpléctica de M.

De hecho, existe una relación más fuerte entre la existencia de grupoides simplécticos sobre M y la existencia de realizaciones simplécticas (ver [6]).

Proposición 3.23. *Sea M una variedad de Poisson. Existe una realización simpléctica completa si y solo si existe un grupoide simpléctico Σ sobre M.*

Agradecimientos: Me gustaría agradecer a los organizadores del XI Congreso Monteiro por su invitación a presentar un curso y a los participantes por asistir a él. En particular, gracias a Viviana Díaz, por su presión para terminar estas notas a tiempo. Este trabajo ha sido parcialmente financiado por los proyectos del MICINN MTM2009-13383 y MTM2009-08166-E. El autor agradece al MICINN por un contrato de investigación Ramón y Cajal.

REFERENCIAS

[1] A. Cannas da Silva, A. Weinstein: *Geometric Models for Noncommutative Algebras*, Berkeley Mathematics Lectures, **10**, American Math. Soc., Providence, 1999.

[2] J.F. Conn: Normal forms por analytic Poisson structures, *Ann. of Math.*, **119** (1984), 577–601.

[3] A. Coste, P. Dazord, A. Weinstein: Groupoïdes symplectiques. *Publ. Dép. Math. Nouvelle Sér. A* **2**, i–ii, 1–62.

[4] T.J. Courant: Dirac manifolds, *Trans. A.M.S.*, **319** (1990), 631–661.

[5] M. Crainic, R.L. Fernandes: Integrability of Lie brackets, *Ann. of Math.*, **157** (2003), 575–620.

[6] M. Crainic, R.L. Fernandes: Integrability of Poisson brackets, *J. Differential Geometry*, **66** (2004), 71–137.

[7] M. Crainic, R.L. Fernandes: A geometric approach to Conn's linearization theorem, *Ann. of Math.*, **173** (2011), 1119–1137

[8] J.-P. Dufour, N.T. Zung: *Poisson structures and their normal forms*, Progress in Mathematics **242**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.

[9] R.L. Fernandes: Lie Algebroids, Holonomy and Characteristic Classes, *Advances in Mathematics*, **170** (2002), 119–179

[10] M. Karasaev: Analogues of objects of the theory of Lie groups for nonlinear Poisson brackets, *Math. USSR Izvestiya*, **28** (1987), 497–527.

[11] A. Lichnerowicz: Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, *J. Differential Geometry*, **12** (1977), 253–300.

[12] K. Mackenzie: *General theory of Lie groupoids and Lie algebroids*, London Math. Soc. Lecture Notes Series **213**, Cambridge Univ. Press, 2005.

[13] J. Marsden, T. Ratiu: Reduction of Poisson manifolds, *Lett. Math. Phys.*, **11** (1986), 161–169.

[14] J. Marsden, T. Ratiu: *Introduction to mechanics and symmetry. A basic exposition of classical mechanical systems. Second edition*, Texts in Applied Mathematics, **17**, Springer-Verlag, New York, 1999.

[15] I. Vaisman: *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds*, Progress in Math., **118**, Birkhäuser, Basel, 1994.

[16] A. Weinstein: The local structure of Poisson manifolds, *J. Differential Geometry*, **18** (1983), 523–557. Errata et Addenda **22** (1985), 255.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA FUNDAMENTAL, UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA, ISLAS CANARIAS, ESPAÑA