

FUNDAMENTOS FÍSICOS Y MATEMÁTICOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

SERGIO D. GRILLO

RESUMEN. En estas notas presentaremos una formulación alternativa de la mecánica cuántica (que no requiere conocimientos previos sobre el tema), diferente a la “formulación tradicional” de los libros de texto, que tiene las ventajas de: (1) estar basada en conceptos físicos elementales, tales como el de medición y el de procedimiento de laboratorio; (2) unificar la descripción de los sistemas clásicos y cuánticos (ya que, de hecho, permite describir cualquier sistema físico); (3) contener al formalismo tradicional de la mecánica cuántica. En tal formulación alternativa, un sistema físico está definido por un reticulado análogo al asociado al *cálculo proposicional* de la lógica formal (i. e. análogo a un *álgebra de Lindenbaum–Tarski*), pero que no cumple en general con el axioma de distributividad. Cada elemento del reticulado representa una proposición acerca del sistema, la cual puede ser verdadera o falsa, y tal que su verdad o falsedad se decide realizando un procedimiento específico: una medición. Veremos que si dicho reticulado es distributivo, solo puede describir un sistema clásico. En caso contrario, veremos que tal reticulado está embebido en una *geometría proyectiva* sobre un espacio de (pre)Hilbert \mathcal{H} y que, por lo tanto, el reticulado en cuestión da lugar a la descripción tradicional de un sistema cuántico. Esto último es cierto salvo por el hecho de que los escalares de \mathcal{H} , que en el formalismo tradicional son los complejos, no quedan determinados por las propiedades del reticulado. Hablaremos brevemente sobre las distintas posibilidades para los escalares y sus posibles consecuencias físicas.

1. LA FORMULACIÓN TRADICIONAL DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

En esta sección vamos a dar la definición de *sistema cuántico* en términos de la formulación que ha tenido más aceptación hasta el momento. Haremos antes una breve revisión de lo que se entiende por *sistema clásico*, con el objeto de identificar algunos de los aspectos en los que se diferencian unos de otros.

Dado que nos adentraremos en cuestiones fundamentales de la Física, necesitamos decir primero qué es lo que vamos a entender por *sistema físico*. Consideremos entonces las siguientes definiciones. Para nosotros, un **sistema físico** será un conjunto de pares ordenados, siendo cada componente del par un **procedimiento** (o **experimento**): acción o conjunto de acciones debidamente prescriptas. A la primera y segunda componentes de cada par las llamaremos **preparación** y **medición**, respectivamente. Los pares en cuestión son seleccionados a partir de algún criterio, guiado por los fenómenos que queremos estudiar.

A las preparaciones también las llamaremos **estados del sistema**.¹ Vamos a suponer que en el conjunto de mediciones puede definirse una relación de equivalencia, a cuyas clases llamaremos **observables**, y que cada una de estas clases está en biyección con un subconjunto de \mathbb{R} . Si una medición dada pertenece a un observable \mathcal{O} y tiene asociado el número $r \in \mathbb{R}$ (vía la biyección recién mencionada), diremos que r es el *resultado de la medición de \mathcal{O}* . Si \mathcal{O} está en biyección con $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$, diremos también que \mathcal{O} *toma valores en Λ* .

Lo que interesa saber para cada sistema físico es la *relación causal* que existe entre los pares de procedimientos que definen al sistema, es decir, responder a la pregunta: después

Palabras clave. cuántica, reticulados, geometría proyectiva.

¹Ver, sin embargo, la definición de *estado del sistema* que aparece en el Apéndice.

de (o durante) una preparación dada, ¿cuáles serán los resultados de las mediciones? Para una discusión más detallada de estas ideas, le sugerimos al lector que consulte el Apéndice de estas notas, el cual constituye una extensión de lo contado aquí.

1.1. Sistemas mecánicos y estadísticos clásicos. Supongamos que queremos estudiar experimentalmente el movimiento de una pelotita p . Identifiquemos a las posiciones de p con los puntos de \mathbb{R}^3 , o sea, asumamos que p es una partícula en el espacio. Los distintos movimientos de p estarán dados por curvas $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ que llamaremos, como es usual, trayectorias. Denotemos por Γ al conjunto de trayectorias. Notemos que cada trayectoria $\gamma \in \Gamma$ está dada por tres funciones $\gamma_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, correspondientes a cada una de las componentes de los puntos de \mathbb{R}^3 .

Cada experimento consistirá en una preparación y una medición. Tanto las preparaciones como las mediciones serán procedimientos que involucrarán a la pelotita, y que estarán asociados a su movimiento.² Más adelante hablaremos sobre las preparaciones. Supondremos por ahora que las mediciones podrán describirse a través de funciones de la forma $\mathcal{O} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, en el sentido que cada medición tendrá asociado un número real que solo dependerá del movimiento $\gamma \in \Gamma$ de la pelotita. En particular, notar que las funciones \mathcal{O} definen una partición del conjunto de mediciones donde cada subconjunto de la partición está en biyección con $Im\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}$. Por este motivo llamaremos *observables* a estas funciones. Luego, si una preparación da lugar a un movimiento γ ,³ el resultado de la medición del observable \mathcal{O} estará dado por el número $\mathcal{O}(\gamma) \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, las mediciones de la componente i -ésima de la aceleración de p a tiempo τ estarán descriptas por la función $\mathcal{O}_{i,\tau}^{\text{aceleración}} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, que vale

$$\mathcal{O}_{i,\tau}^{\text{aceleración}}(\gamma) = \left. \frac{d^2\gamma_i}{dt^2} \right|_{t=\tau} = \gamma_i''(\tau).$$

Según las leyes de Newton, si p tiene masa m y está sometida a la acción de una fuerza \mathbf{F} , la cual es función del tiempo, de la posición de p y de su velocidad, i. e.

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

(que supondremos clase C^1), luego las trayectorias $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ estarán dadas por las soluciones de

$$m\gamma''(t) = \mathbf{F}(\gamma(t), \gamma'(t), t). \quad (*)$$

Como se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, y en forma normal, para cada $\tau \in \mathbb{R}$ y $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, la condición $(\gamma(\tau), \gamma'(\tau)) = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$ define una única solución $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de (*) (gracias a que pedimos que \mathbf{F} sea de clase C^1). En otras palabras, si fijamos m y \mathbf{F} como arriba, la trayectoria γ estará totalmente determinada por la posición y la velocidad en algún tiempo τ . Luego, como el resultado de la medición de cada observable \mathcal{O} solo depende de la trayectoria γ , es fácil ver que, si fijamos m y \mathbf{F} , podemos describir las mediciones de \mathcal{O} a través de una función $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y un número $\tau_f \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(\gamma(\tau_f), \gamma'(\tau_f)) = \mathcal{O}(\gamma).$$

A las funciones f también las llamaremos observables. Consideraremos de ahora en más solo mediciones definidas por los observables $f \in \text{Fun}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$. Luego, el conjunto de

²Digamos también que tanto la preparación como la medición pueden ser realizadas en cualquier tiempo $\tau \in \mathbb{R}$, en el sentido que la prescripción que define a una preparación o a una medición puede hablar de un acto a realizar en un tiempo dado, en distintos tiempos aislados, o durante todo un lapso $I \subseteq \mathbb{R}$.

³En principio, cada preparación puede dar lugar a más de un movimiento.

mediciones estará dado por la unión disjunta

$$\bigvee_{f \in \text{Fun}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)} \text{Im}f.$$

En base a lo visto arriba, si la preparación consiste en:

- procurar que la masa de la pelotita valga m ;⁴
- fijar la fuerza sobre ella en $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ (de clase C^1);
- hacer que su posición y su velocidad iniciales (i. e. a $t = 0$) estén dadas por un par $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$;

luego, la medición de cada observable f arrojará un único resultado. O sea, el resultado de las mediciones estará completamente determinado por la preparación. Concentrémonos por ahora en estas preparaciones, variando (\mathbf{x}, \mathbf{v}) en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ y con m y \mathbf{F} fijos. En la terminología introducida al comienzo de esta sección, el conjunto de pares seleccionados

$$\{\text{preparaciones}\} \times \{\text{mediciones}\},$$

que podemos identificar con el producto cartesiano

$$\{(m, \mathbf{F})\} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \left(\bigvee_{f \in \text{Fun}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)} \text{Im}f \right),$$

define un ejemplo de sistema físico. Se trata de un **sistema mecánico clásico**, y se hace referencia a él como: “la partícula de masa m sometida a la fuerza \mathbf{F} ”. Los estados de este sistema (i. e. las preparaciones seleccionadas más arriba) pueden identificarse con los puntos de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Luego, sus observables son funciones del estado. Según lo visto arriba, el resultado de la medición de cada observable está completamente determinado por el estado del sistema. En otras palabras, la relación causal entre estados y los resultados de la medición de cada observable es la *certeza*. Se habla en estos casos de sistemas **determinísticos**.

Notemos que si repetimos n veces una preparación como la de arriba, los resultados de las mediciones de cada observable van a ser siempre los mismos. Si en cambio consideramos preparaciones que fijan m y \mathbf{F} , pero que no dan valores precisos de la posición y la velocidad de la pelotita en algún instante, la historia es bien diferente. Una tal preparación podría ser:

- procurar que la masa de la pelotita valga m ;
- fijar la fuerza sobre ella en $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ (de clase C^1);
- hacer que su posición y su velocidad iniciales estén contenidas en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

La última prescripción se podría cambiar también por:

- hacer que su posición y su velocidad iniciales estén contenidas en cada región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ con una probabilidad P_Ω .

En cualquier caso, si realizamos n veces esta preparación y en cada repetición medimos el observable f , en general vamos a tener n valores diferentes para f . En otras palabras, cada observable tendrá, en general, una *dispersión* no nula. Si la frecuencia del valor r es $n_f(r)/n$, podemos definir cuando $n \rightarrow \infty$ la *probabilidad*

$$p_f(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_f(r)}{n}$$

de medir el valor r para el observable f . Notar que vamos a tener una de estas probabilidades para cada preparación de las de arriba, y para cada observable. Como los valores que tome f van a depender del movimiento de la pelotita, y como a su vez ese movimiento depende

⁴Notar que podemos cambiar de pelotita de una preparación a otra. Lo único que importa es que tenga masa m .

de las condiciones iniciales $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, las probabilidades p_f se van a poder expresar en términos de probabilidades sobre $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Más precisamente, si las funciones f son medibles (según Borel), puede mostrarse que las probabilidades de arriba, para todo f , van a estar descritas por una medida $\mu : B(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \rightarrow [0, 1]$, donde los elementos de $B(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ son los conjuntos de Borel de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. En consecuencia, cada preparación va a dar lugar a una medida μ . Estas preparaciones (junto con los observables f) definen un nuevo sistema físico: un **sistema estadístico clásico**. Los estados del sistema son ahora las medidas de probabilidad sobre $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, en lugar de sus puntos. La relación causal arriba mencionada ya no es la certeza, sino que está dada por probabilidades. Estamos ante un ejemplo de sistema **no-determinístico**.

Por supuesto que la discusión anterior, tanto en lo que respecta a sistemas mecánicos clásicos como a sistemas estadísticos, puede extenderse a un número arbitrario de partículas moviéndose en regiones más generales que \mathbb{R}^3 .

1.2. Sistemas cuánticos. Por lo visto en la sección anterior queda claro que, fijado un sistema físico, la manera en que sus preparaciones y mediciones se relacionan causalmente estará dada, en general, por un conjunto de probabilidades: una para cada par estado-observable. Más precisamente, si medimos n veces el observable \mathcal{O} en el estado α (o sea, realizamos n veces la preparación α), y obtenemos el resultado r con una frecuencia $n_{\mathcal{O}}^{\alpha}(r)/n$, luego la probabilidad de que en el estado α la medición de \mathcal{O} arroje el resultado r será

$$p_{\mathcal{O}}^{\alpha}(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_{\mathcal{O}}^{\alpha}(r)}{n}. \quad (\dagger)$$

Cuando el sistema es determinístico, esas probabilidades son triviales: valen 1 para un único resultado de la medición de \mathcal{O} y 0 para el resto, cualquiera sea el estado α .

Si bien un sistema estadístico es no-determinístico, es claro que basta restringir adecuadamente las preparaciones que lo definen para tener un sistema que sí lo es: el sistema mecánico clásico subyacente. La dispersión que se obtiene en la medición de los observables de un sistema estadístico puede interpretarse como una consecuencia de nuestra *ignorancia* sobre “el estado exacto del sistema”. Más concretamente, en el caso del movimiento de la pelotita, si agregamos *información adicional* a las preparaciones del sistema estadístico, es decir, si hacemos un *refinamiento* de sus preparaciones, de tal manera que se especifique en ellas la posición y velocidad iniciales de la pelotita, el resultado de cada medición estará completamente determinado por la preparación. Existen sistemas físicos para los cuales tal refinamiento no es posible.⁵ Se trata de los denominados *sistemas cuánticos*. Ejemplos de estos sistemas aparecen al estudiar fenómenos que involucran escalas atómicas. Son sistemas intrínsecamente no-determinísticos. No importa qué refinamiento se haga de cada preparación, los resultados de la medición de ciertos observables siempre tienen dispersión no nula. Más precisamente, para cada estado ρ del sistema existe al menos un observable \mathcal{O} tal que su *dispersión cuadrática media* en dicho estado, que denotaremos $\Delta_{\rho} \mathcal{O}^2$, cumple $\Delta_{\rho} \mathcal{O}^2 \neq 0$. Por este motivo, se dice que la mecánica cuántica tiene una *componente estadística irreductible*. Otra característica de los sistemas cuánticos es el *principio de incertidumbre*. Este dice que existen pares de observables $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ tales que $\Delta_{\rho} \mathcal{O}_1^2 \cdot \Delta_{\rho} \mathcal{O}_2^2 > 0$ para todo estado ρ . *Grosso modo*, si en algún estado la dispersión de \mathcal{O}_1 es chica, luego, en el mismo estado, la de \mathcal{O}_2 será grande. O sea, si existe una sucesión de estados para los

⁵Esta imposibilidad dio lugar a profundas discusiones en el ámbito de la filosofía. Por ejemplo, marcó el fin del *mecanicismo*, que sostenía que la explicación de todo fenómeno físico podía reducirse a términos mecánicos.

cuales la dispersión del observable \mathcal{O}_1 tiende a cero, luego, en esa misma sucesión, la dispersión de \mathcal{O}_2 tenderá a ∞ . Esto implica que, cualquiera sea el estado, o si se quiere, por más *refinada* que sea la preparación, no es posible determinar con absoluta precisión el valor de los dos observables \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 . Un ejemplo de ello aparece al estudiar el movimiento de una partícula microscópica (i. e. en la escala de los 10^{-10} m, aproximadamente). Para cualquier estado de la partícula, o sea, cualquiera sea la preparación que se haga, los observables “posición” y “velocidad” no pueden ser determinados, ambos, con precisión absoluta, i. e. con dispersión cero. Esto se interpreta⁶ diciendo que, por ejemplo, “si conozco exactamente dónde está la partícula, no puedo saber a qué velocidad viaja”. Otra de las características que distinguen a los sistemas cuánticos (de los clásicos), que fue la primera en ser observada y les dio el nombre a estos sistemas, es que la medición de ciertos observables sólo puede dar resultados discretos. Como esto implica que la diferencia entre esos resultados es finita, es decir, “pega saltos discretos”, se habla de la existencia de *magnitudes físicas cuantizadas*. Mencionemos por último el *principio de superposición*, el cual da lugar a la observación de fenómenos tales como *interferencia* y *coherencia* entre estados. Resumiendo, algunas de las características más importantes de los sistemas cuánticos son:

1. su *componente estadística irreductible*,
2. el *principio de incertidumbre*,
3. la presencia de *magnitudes físicas cuantizadas*,
4. el *principio de superposición*.

Vale aclarar que tales características no son todas independientes entre sí, ni han sido ordenadas según algún criterio de relevancia. Para codificarlas, la solución que se encontró está contenida en las próximas dos definiciones. Tales definiciones están basadas en la presentación de los sistemas cuánticos que aparece en el libro Ballentine (2006). Con el fin de entender la primera, recordemos que para definir un sistema físico es necesario precisar un producto cartesiano de preparaciones y mediciones, o lo que es lo mismo, sus estados y sus observables. Por ejemplo, para el sistema mecánico clásico definido por el movimiento de una partícula en \mathbb{R}^3 , fijados m y \mathbf{F} , sus estados son los puntos de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ y sus observables las funciones de $\text{Fun}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$; y para el sistema estadístico asociado, sus observables son los mismos y sus estados son las medidas de probabilidad sobre $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

SC1 Un **sistema cuántico** es un sistema físico para el cual existe un espacio de Hilbert complejo \mathcal{H} tal que los observables del sistema pueden describirse a través de los operadores hermíticos sobre \mathcal{H} , y los estados del sistema a través de los operadores definidos positivos y de traza unidad.

⁶Hay que tener cuidado, sin embargo, con este tipo de interpretaciones en mecánica cuántica. Notemos que estamos usando el lenguaje del mundo macroscópico para hablar sobre el microscópico. En el mundo macroscópico podemos hablar de una partícula, como por ejemplo una pelotita, sin hacer referencia explícita a la idea de posición. En el mundo microscópico no. La manera de concebir la idea de *partícula microscópica*, debido a que no se puede ver, es a través de ciertos dispositivos, llamados *detectores*, cuya sensibilidad está limitada a regiones pequeñas del espacio. El tamaño de dichas regiones, para todo fin práctico, se puede hacer tan chico como se quiera. Luego, uno dice que hay una partícula en una región Ω si el detector se activa en esa región. Los procedimientos que involucran el uso de detectores definen el observable “posición”. O sea, la idea de partícula está asociada al procedimiento de su localización. Por ende, no se puede hablar de partícula sin hablar de posición.

Un espacio de Hilbert complejo \mathcal{H} es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} con producto interno, el cual es completo como espacio métrico. El conjunto de operadores de \mathcal{H} , que indicaremos $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, está formado por las transformaciones lineales continuas⁷ $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$.

Volviendo a la Definición SC1, si \mathcal{H} es el espacio de Hilbert en términos del cual se puede describir un sistema cuántico dado, sus estados serán los operadores $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tales que, para todo $\varphi \in \mathcal{H}$,

$$\langle \varphi, \rho(\varphi) \rangle > 0 \text{ salvo que } \varphi = 0, \quad (\text{definido positivo})$$

y

$$\text{tr}(\rho) = 1. \quad (\text{traza unidad})$$

Por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ estamos indicando el producto interno de \mathcal{H} y por tr la traza de un operador (si esta existe).⁸ Es fácil ver que cada vector φ de norma 1 define un estado, que denotaremos ρ_φ , y está dado por

$$\rho_\varphi(\psi) = \langle \varphi, \psi \rangle \varphi.$$

Un observable del sistema será un operador $O \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$,

$$\langle \varphi, O(\psi) \rangle = \langle O(\varphi), \psi \rangle \quad (\text{hermítico}).$$

Cabe mencionar que el espectro Λ de todo operador hermítico O está formado por números reales. Más aún, si el espectro de O está formado por sus autovalores $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, existe una familia de proyectores ortogonales P_i (i. e. $P_i^2 = P_i$ y $P_i^\dagger = P_i$), uno para cada autovalor λ_i , tal que $P_i P_j = \delta_{ij} P_j$, $\sum_{i \in \mathbb{N}} P_i = I$ y

$$O = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i P_i. \quad (1)$$

Para espectros más generales, asociada a cada operador hermítico O existe una aplicación

$$P : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad U \mapsto P_U,$$

tal que $P_U^2 = P_U$, $P_U^\dagger = P_U$, $P_\Lambda = I$ (el operador identidad) y, para todo $\varphi \in \mathcal{H}$ de norma 1,

$$P_\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1], \quad U \mapsto \langle \varphi, P_U(\varphi) \rangle$$

es una medida. A la aplicación P se la llama **medida espectral** del operador O . En términos de P , es posible escribir O en la forma

$$O = \int \lambda P, \quad (2)$$

en el sentido que, para todo $\varphi \in \mathcal{H}$ de norma 1,

$$\langle \varphi, O(\varphi) \rangle = \int \lambda \langle \varphi, P(\varphi) \rangle.$$

(Vale mencionar que los números $\langle \varphi, O(\varphi) \rangle$ son suficientes para conocer un operador hermítico O). Las fórmulas (1) y (2) se conocen como la *descomposición espectral de O* . Es claro que (1) es un caso particular de (2). Por otro lado, notar que si damos una aplicación P , la ecuación (2) define un único operador hermítico que tiene a P como su medida espectral. En consecuencia, es equivalente dar un operador hermítico O a dar una medida espectral P .

⁷En realidad se consideran conjuntos más grandes de transformaciones lineales, a las cuales no se les exige la continuidad. Nos restringiremos a los continuos solo por simplicidad.

⁸Si \mathcal{H} tiene una base ortonormal dada por vectores $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, y $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, luego

$$\text{tr}(T) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle \varphi_i, T(\varphi_i) \rangle,$$

si tal suma existe.

La siguiente definición nos dice qué es lo que se obtiene como resultado de la medición de un observable, y cómo se calculan las probabilidades asociadas a tal medición. Todo esto codifica la *componente probabilística* y la *cuantización de magnitudes físicas* antes mencionada.

SC2 Dado un sistema cuántico definido sobre \mathcal{H} y un observable O con descomposición espectral dada por (1):

- los resultados posibles de la medición de O son los números λ_i ;
- la probabilidad de obtener el resultado λ_i es, en el estado ρ ,

$$p_i^\rho \equiv \text{tr}(\rho \cdot P_i).$$

Para un observable O con descomposición espectral dada por (2),

- los resultados posibles de la medición de O son los números $\lambda \in \Lambda$;
- la probabilidad de obtener, en el estado ρ , un resultado en el conjunto de Borel U es

$$p_U^\rho \equiv \text{tr}(\rho \cdot P_U).$$

¿Qué hay del *principio de incertidumbre*? De la Definición SC2 se desprende que el *valor medio* o *de expectación* de la medición de un observable O en el estado ρ es

$$\langle O \rangle_\rho \equiv \text{tr}(\rho \cdot O).$$

Luego, su dispersión cuadrática será, en el mismo estado,

$$\Delta_\rho O^2 \equiv \left\langle \left(O - \langle O \rangle_\rho \right)^2 \right\rangle_\rho.$$

Consideremos dos observables O_1 y O_2 tales que

$$[O_1, O_2] \equiv O_1 \cdot O_2 - O_2 \cdot O_1 = C,$$

i. e. el *conmutador* $[O_1, O_2]$ vale C . Se puede ver que, fijado un estado ρ ,

$$\Delta_\rho O_1^2 \cdot \Delta_\rho O_2^2 \geq \frac{1}{2} \left| \langle C \rangle_\rho \right|.$$

Si $C = \lambda I$, un múltiplo de identidad, para todo ρ se tiene que

$$\Delta_\rho O_1^2 \cdot \Delta_\rho O_2^2 > \frac{|\lambda|}{2}.$$

Luego, cualquiera sea el estado del sistema, los observables O_1 y O_2 no pueden tener, ambos, dispersión nula. Esto es justamente lo que enuncia el principio de incertidumbre. Vale mencionar que en todo espacio de Hilbert es posible encontrar operadores cuyo conmutador sea proporcional a la identidad.

No vamos a hablar en estas notas sobre cómo este formalismo describe los fenómenos de *interferencia* y *coherencia* mencionados más arriba.

Es natural preguntarse: ¿por qué un sistema que presente las propiedades **1-4** (ver arriba) debe estar descrito de esta forma? ¿Es posible describirlo de otra manera? En el resto de estas notas nos concentraremos en dar una respuesta a cada una de estas preguntas.

2. EL CÁLCULO PROPOSICIONAL DE UN SISTEMA FÍSICO

Dado un sistema físico, consideremos el conjunto de todas las **proposiciones** o afirmaciones acerca del sistema, cuya verdad o falsedad, en cada estado, solo puede verificarse a través de una medición. Denotaremos por \mathcal{L} a tal conjunto. Dados un observable \mathcal{O} del sistema en cuestión, que toma valores en Λ , y un subconjunto $U \subseteq \Lambda$, tenemos asociada la proposición: “el valor de la medición de \mathcal{O} pertenece a U ”. Se trata de un elemento de \mathcal{L} , pues puede determinarse su verdad o falsedad a través de la medición de \mathcal{O} . A tal elemento lo denotaremos \mathcal{O}_U .

En lo que sigue, vamos a estudiar algunas de las estructuras que pueden definirse en \mathcal{L} .

Los resultados de esta sección y la siguiente han sido extraídos de los libros Jauch (1968) y Varadarajan (2007).

2.1. El reticulado \mathcal{L} . Consideremos en \mathcal{L} la relación formada por los pares $(a, b) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ que cumplen: si la proposición a es verdadera, luego la proposición b también, es decir, a implica b . Cuando un par (a, b) pertenezca a esta relación escribiremos $a \subseteq b$. Por ejemplo, para las proposiciones \mathcal{O}_U definidas arriba, tendremos que $\mathcal{O}_U \subseteq \mathcal{O}_V$ si $U \subseteq V$ (en el sentido de la inclusión de conjuntos), ya que la proposición “el valor de la medición de \mathcal{O} pertenece a U ” implica que “el valor de la medición de \mathcal{O} pertenece a V ” para todo V que contenga a U .

En términos de mediciones, $a \subseteq b$ significa que: para cada estado del sistema, si el resultado de la medición para determinar la verdad de a es afirmativo, el resultado que hubiésemos obtenido para la de b también habría sido afirmativo. Más adelante volveremos sobre esta interpretación.

Vamos a suponer que si $a \subseteq b$ y $b \subseteq a$, i. e. si las proposiciones a y b son equivalentes, luego $a = b$. Si esto no es cierto, podemos considerar en \mathcal{L} la relación de equivalencia formada por los pares (a, b) que cumplan: $a \subseteq b$ y $b \subseteq a$, y trabajar con el conjunto cociente.

Es fácil ver que la relación \subseteq define un *orden parcial* en \mathcal{L} :

L.a $a \subseteq a$;

L.b si $a \subseteq b$ y $b \subseteq a$, luego $a = b$ (debido a la suposición de recipiencia);

L.c si $a \subseteq b$ y $b \subseteq c$, luego $a \subseteq c$.

Para una revisión sobre conjuntos parcialmente ordenados y reticulados, el lector puede consultar el libro Davey & Priestley (2008).

Agregaremos a \mathcal{L} la *proposición trivial* T . Se trata de una afirmación sobre el sistema que es verdadera en todo estado. Es claro que la proposición a implica T para toda a . Luego, la extensión del orden \subseteq al nuevo \mathcal{L} (con T incluida), que respeta la interpretación de T como la afirmación que es siempre verdadera, es

$$a \subseteq T, \forall a \in \mathcal{L}.$$

En el contexto de conjuntos parcialmente ordenados, un elemento con estas características se dice que es un elemento *top*. No nos vamos a preocupar por la interpretación de T en términos de mediciones. Es simplemente una proposición que agregamos a \mathcal{L} por mera conveniencia.

Dadas ahora dos proposiciones $a, b \in \mathcal{L}$, consideremos la proposición “ a y b ”, i. e. la proposición que afirma a y b simultáneamente. La indicaremos, como es usual, $a \cap b$. Para que esta proposición sea un elemento de \mathcal{L} , debe poder determinarse a partir de alguna

medición. Vamos a suponer que esto es cierto para todo par $a, b \in \mathcal{L}$.⁹ Más aún, vamos a suponer que para todo subconjunto $\{a_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{L}$, existe su *ínfimo*

$$\bigcap_{i \in I} a_i \in \mathcal{L},$$

el cual cumple

$$\text{II.i.a } \bigcap_{i \in I} a_i \subseteq a_j, \forall j \in I,$$

$$\text{II.i.b } \text{ y si } x \subseteq a_j, \forall j \in I, \text{ luego } x \subseteq \bigcap_{i \in I} a_i.$$

Con esta suposición (teniendo en cuenta la presencia de la proposición trivial), podemos asegurar que el par (\mathcal{L}, \subseteq) es un **reticulado completo**. Luego, para todo conjunto $\{a_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{L}$ existe su *supremo*

$$\bigcup_{i \in I} a_i \in \mathcal{L},$$

el cual cumple

$$\text{II.s.a } a_j \subseteq \bigcup_{i \in I} a_i, \forall j \in I,$$

$$\text{II.s.b } \text{ y si } a_j \subseteq x, \forall j \in I, \text{ luego } \bigcup_{i \in I} a_i \subseteq x.$$

Asociada a cada proposición $a \in \mathcal{L}$ tenemos la proposición opuesta: “no a ”. La indicaremos a' . Si $a \neq \top$, la medición que determina la verdad o falsedad de a , determina también la de a' . Por lo tanto, si $a \neq \top$, luego a' es un elemento de \mathcal{L} . Para las proposiciones \mathcal{O}_U , tendremos que $\mathcal{O}'_U = \mathcal{O}_{U^c}$ (siendo U^c el complemento de U en \mathbb{R}), ya que la proposición “el valor de la medición de \mathcal{O} no pertenece a U ” equivale a “el valor de la medición de \mathcal{O} pertenece a U^c ”.

Para que la opuesta de toda proposición de \mathcal{L} pertenezca a \mathcal{L} , deberíamos agregar un último elemento a este conjunto: la *proposición absurda* \emptyset , para el cual $\top' = \emptyset$ y $\emptyset' = \top$. Luego, \emptyset es la proposición que siempre es falsa. (De nuevo, no nos interesa la interpretación de \emptyset en términos de mediciones). La extensión del orden \subseteq al nuevo \mathcal{L} (con \emptyset incluido), que respeta la interpretación de \emptyset como la afirmación que es siempre falsa, es

$$\emptyset \subseteq a, \forall a \in \mathcal{L}.$$

En un reticulado general, a un elemento con estas características se le llama *bottom*. Es fácil ver que, para todo elemento de \mathcal{L} ,

$$\text{III.a } (a')' = a,$$

$$\text{III.b } a' \cap a = \emptyset,$$

$$\text{III.c } a' \cup a = \top,$$

$$\text{III.d } a \subseteq b \text{ si y solo si } b' \subseteq a'.$$

Las propiedades de arriba dicen que la aplicación¹⁰ $a \mapsto a'$ define una **ortocomplementación** para \mathcal{L} . Combinando esta estructura con \cap , se sigue que

$$\bigcup_{i \in I} a_i = (\bigcap_{i \in I} a'_i)'$$

y además

$$\emptyset = \bigcap_{a \in \mathcal{L}} a \quad \text{y} \quad \top = \bigcup_{a \in \mathcal{L}} a.$$

Resumiendo, el conjunto de proposiciones de un sistema físico (junto con las proposiciones absurda y trivial) define un **reticulado completo** (axiomas **I** y **II**) y **ortocomplementado**

⁹Si una tal medición no está presente en la definición original del sistema, es posible definir una, en términos de las que determinan a y b , que determine la verdad o falsedad de $a \cap b$ (ver Jauch, 1968). Pero eso significa agregar elementos al conjunto de mediciones, y por ende representa una modificación del sistema original. O sea, estaríamos asumiendo una modificación del conjunto de mediciones dado originalmente.

¹⁰Vale decir que, para cada $a \in \mathcal{L}$, puede existir otro elemento con las mismas propiedades que a' .

(axioma **III**). En el siguiente cuadro aparecen las operaciones sobre \mathcal{L} y su interpretación en términos de proposiciones.

Operación en \mathcal{L}	Interpretación
$a \subseteq b$	a implica b
$a \cap b$	a y b
$a \cup b$	a o b
a'	no a

Dado que estamos hablando de proposiciones, es inevitable hacer analogías con el cálculo proposicional de la lógica. Es por eso que a los reticulados de arriba (completos y ortocomplementados) a veces se les llama *lógicas*. Para cada espacio de Hilbert \mathcal{H} sobre un anillo con división D , el reticulado $\mathcal{L}(\mathcal{H}, D)$ formado por los subespacios cerrados de \mathcal{H} (con respecto a la métrica definida por su producto interno), junto con la inclusión de subespacios y la ortogonalidad (como ortocomplementación), es una lógica. A estos reticulados, si $D = \mathbb{C}$, se les llama *lógicas estándar*. El problema principal de estas notas es entender bajo qué condiciones el reticulado \mathcal{L} es una lógica estándar, o al menos cuándo puede ser asociado a una de ellas.

2.2. El sistema físico \mathcal{L} : observables y estados. Como hemos visto al comienzo de esta sección, cada observable \mathcal{O} define una aplicación

$$\mathcal{O} : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}, U \subseteq \mathbb{R} \longmapsto \mathcal{O}_U. \quad (O)$$

Por otro lado, cada par compuesto por un estado y un observable define la probabilidad $p_{\mathcal{O}} : B(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ [ver (†)]. Luego, si todas las proposiciones de \mathcal{L} son las \mathcal{O}_U 's, cada estado del sistema definirá una aplicación

$$p : \mathcal{L} \rightarrow [0, 1] \quad (E)$$

tal que

$$p(\mathcal{O}_U) = p_{\mathcal{O}}(U). \quad (\ddagger)$$

Tomaremos ahora otro punto de partida. Vamos a definir un sistema físico a partir de un reticulado \mathcal{L} completo y ortocomplementado. A sus elementos les llamaremos de nuevo proposiciones, y diremos que son afirmaciones acerca del sistema. Inspirados en las aplicaciones (O) y (E) de arriba, vamos a llamar **estados de \mathcal{L}** a las aplicaciones $p : \mathcal{L} \rightarrow [0, 1]$ tales que

E.1 $p(\emptyset) = 0$ y $p(\top) = 1$,

E.2 si $\{a_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{L}$ cumple $a_i \subseteq a'_j, \forall i \neq j \in \mathbb{N}$, luego

$$p(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} a_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} p(a_i),$$

E.3 si para $\{a_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{L}$ se tiene que $p(a_i) = 1, \forall i \in I$, luego

$$p(\bigcap_{i \in I} a_i) = 1,$$

E.4 si $a \neq b$, existe p tal que $p(a) \neq p(b)$.

Cada p define claramente una especie de medida sobre el reticulado \mathcal{L} . El número $p(a)$ se interpreta como la probabilidad de que la proposición a sea verdadera en el estado p . La última condición asegura que debemos conocer la verdad o falsedad de todas las proposiciones para determinar un estado: “no hay proposiciones irrelevantes”.

Por otro lado, llamaremos **observable de \mathcal{L}** a las aplicaciones $\mathcal{O} : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L} : U \longmapsto \mathcal{O}_U$, tales que

O.1 $\mathcal{O}_{\emptyset} = \emptyset$ y $\mathcal{O}_{\mathbb{R}} = \top$,

O.2 si $U \subseteq V^c$, luego $\mathcal{O}_U \subseteq \mathcal{O}'_V$,

O.3 si $\{U_i : i \in I\} \subseteq B(\mathbb{R})$ cumple $U_i \subseteq U'_j, \forall i \neq j \in I$, luego

$$\mathcal{O}_{\bigcup_{i \in I} U_i} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_{U_i}.$$

En resumen, a partir de \mathcal{L} hemos definido un sistema físico cuyas preparaciones y mediciones están determinadas por los conjuntos de estados y observables arriba descriptos. La relación causal está dada por las mismas fórmulas que antes [ver (‡)]: la probabilidad de obtener, en el estado p , un resultado en la medición del observable \mathcal{O} que esté contenido en U vale $p(\mathcal{O}_U)$.

Se puede ver que los sistemas definidos arriba exhiben algunas de las características **1-4** introducidas en la Sección 1.2 (ver Jauch, página 105, para una discusión sobre el principio de superposición). En algún sentido, que no precisaremos aquí, estos sistemas gozan de una especie de *dualidad* entre el conjunto de preparaciones y mediciones. Más concretamente, son sistemas cuyas preparaciones y mediciones están dadas por los mismos procedimientos.

De ahora en más, todos los sistemas físicos que consideremos estarán definidos por un reticulado \mathcal{L} , en el sentido que sus estados y observables estarán dados por las propiedades **E** y **O**.

2.3. Los sistemas clásicos y las álgebras de Boole: la lógica clásica. Veremos en esta sección que el reticulado \mathcal{L} asociado a un sistema mecánico clásico o a uno estadístico es un **álgebra de Boole**, i. e. un reticulado completo, ortocomplementado, con elementos bottom y top, para el cual vale el **axioma de distributividad**

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c) \quad \text{y} \quad a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c).$$

Los subconjuntos de Borel $B(\mathbb{R}^n)$ son un ejemplo de álgebra de Boole.

Consideremos nuevamente el movimiento de una partícula en \mathbb{R}^3 . Tanto para el sistema mecánico como para el sistema estadístico asociado, recordemos que los observables están definidos por funciones $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. A partir de estas funciones, podemos construir las proposiciones: “el valor de f está contenido en el subconjunto $U \subseteq \mathbb{R}$ ”. Luego, estas proposiciones serán las que definan el reticulado \mathcal{L} del sistema (tanto del mecánico como del estadístico). Por otro lado, notemos que el valor de f está contenido en el subconjunto $U \subseteq \mathbb{R}$ si y solo si el par posición-velocidad de la partícula pertenece a $\Omega = f^{-1}(U)$. Esto establece una biyección entre las proposiciones de arriba y los subconjuntos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. En el contexto de la mecánica estadística se suele suponer que las funciones f son medibles. Si suponemos que los subconjuntos $U \subseteq \mathbb{R}$ son de Borel, luego $\Omega = f^{-1}(U)$ será un conjunto de Borel de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Por lo tanto tenemos una biyección entre \mathcal{L} y $B(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$. Puede verse que esta biyección es un σ -isomorfismo de reticulados (ver definición en la próxima sección). Luego, \mathcal{L} es un álgebra de Boole. Esto explica, como hemos visto antes, el hecho de que los estados del sistema se puedan caracterizar como las medidas de probabilidad sobre $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Debido a la relación que existe entre las álgebras de Boole y el cálculo proposicional de la lógica, podríamos decir que el reticulado \mathcal{L} de arriba es una *lógica clásica*.

Luego, si tenemos un sistema cuyo comportamiento no es el de uno clásico, podemos decir que su reticulado no puede ser distributivo. A veces, para hacer referencia a los reticulados no distributivos se habla de *lógicas cuánticas*.

Comentemos por último que el reticulado de arriba contiene proposiciones $P \in \mathcal{L}$, tales que

$$P \neq \emptyset \quad \text{y} \quad P \subseteq a, \forall a \neq \emptyset.$$

Estas se corresponden exactamente con los puntos de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, vistos como elementos de $B(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$. Más adelante volveremos sobre esta propiedad.

3. LA LÓGICA CUÁNTICA Y LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

Supongamos que tenemos un sistema definido por un reticulado de proposiciones \mathcal{L} . En esta sección trataremos de averiguar bajo qué condiciones dicho reticulado describe un sistema cuántico, en el sentido de la Sección 1.2. En otras palabras, bajo qué condiciones podemos asociar a \mathcal{L} un espacio de Hilbert \mathcal{H} , de forma tal que los estados del sistema sean operadores definidos positivos de traza 1 y los observables sean operadores hermíticos sobre \mathcal{H} .

3.1. Proposiciones compatibles y descomposición de reticulados. Necesitamos algunas definiciones sobre reticulados generales L antes de continuar (ver Davey & Priestley, 2008).

- Dado un reticulado (resp. completo) L , se dice que un subconjunto $S \subseteq L$ es un **subreticulado** (resp. completo) si el orden de L restringido a S define en este último una estructura de reticulado (resp. completo). Se puede ver que las intersecciones de un número arbitrario de subreticulados (resp. completos) define un subreticulado (resp. completo). Dado un subconjunto $X \subseteq L$, el **subreticulado (resp. completo) generado por X** se define como la intersección de todos los subreticulados (resp. completos) que contienen a X .

- Dados dos reticulados (resp. completos) L y M una función $f : L \rightarrow M$ es un **homomorfismo** (resp. **σ -homomorfismo**) si $f(a \cup b) = f(a) \cup f(b)$ y $f(a \cap b) = f(a) \cap f(b)$ (resp. ídem anterior para ínfimos y supremos arbitrarios). Es claro que la imagen de f es un reticulado (resp. completo). Diremos que un tal f es un **isomorfismo** (resp. **σ -isomorfismo**) si es una función biyectiva.

- Notemos que si $f : L \rightarrow M$ es un homomorfismo (resp. σ -homomorfismo) se cumple: si $a \subseteq b$, luego $f(a) \subseteq f(b)$. Cuando una función f cumpla: $a \subseteq b$ si y solo si $f(a) \subseteq f(b)$, diremos que f es un **embedding**. Tal función será, automáticamente, inyectiva.

- Se dice que los elementos de X son **compatibles** si el subreticulado (resp. completo) que genera es distributivo. Dos elementos $a, b \in L$ son **compatibles**, y se escribe $a \leftrightarrow b$, si el subreticulado (resp. completo) generado por $X = \{a, b\}$ es distributivo. La relación de compatibilidad es claramente simétrica, pero no es transitiva. Al subconjunto de elementos de L que son compatibles con todos los elementos de L se le llama **centro**, y se lo denota \mathcal{C} . Notar que el bottom \emptyset y el top \top de L , cuando existen, son compatibles con todos los elementos de L . Diremos que el centro es **trivial** si $\mathcal{C} = \{\emptyset, \top\}$, y cuando eso suceda diremos que L es **irreducible**.

- Dada una familia de reticulados (resp. completos) $L_i, i \in I$, se define su **producto** $\times_{i \in I} L_i$ como su producto cartesiano con orden componente a componente. Una **descomposición** de un reticulado (resp. completo) L es un isomorfismo (resp. σ -isomorfismo) de L con un producto $\times_{i \in I} L_i$.

Hechas estas definiciones, volvamos a nuestro reticulado completo y ortocomplementado \mathcal{L} . Dado que los elementos compatibles de \mathcal{L} generan subálgebras de Boole, y vimos en la sección anterior que estas definen sistemas clásicos, se podría interpretar esto diciendo que las mediciones asociadas a proposiciones compatibles “se comportan de forma clásica”.

Recordemos que en términos de mediciones, $a \subseteq b$ significa que, para cada estado del sistema, si el resultado de la medición para determinar la verdad de a es afirmativo, el resultado que hubiésemos obtenido para la de b también habría sido afirmativo. Esto sabemos que funciona en el mundo de lo macroscópico, i. e. en el ámbito de la mecánica clásica, en el cual todas las proposiciones son compatibles. Es de esperar entonces que si dos proposiciones cumplen $a \subseteq b$, luego $a \leftrightarrow b$. Vamos a sumar entonces un axioma más al reticulado \mathcal{L} . Diremos que un reticulado es **modular débil** si

IV $a \subseteq b$ implica $a \leftrightarrow b$.

Si todos los elementos de \mathcal{L} fueran compatibles, luego \mathcal{L} sería un álgebra de Boole. Estaríamos en el caso de un sistema clásico. Por ende, vamos a suponer que en \mathcal{L} existen elementos no compatibles, o sea que \mathcal{L} es no-Booleano. En tal caso, puede mostrarse (ver el libro de Jauch, página 124, y Piron, 1964), bajo ciertas condiciones, que \mathcal{L} se puede descomponer como producto de irreducibles.¹¹ Lo que necesitamos para mostrar esto último, en general, es que \mathcal{L} sea **atómico**:

V.1 existen proposiciones minimales o *puntos*, i. e. elementos $P \in \mathcal{L} - \{\emptyset\}$ tales que si $x \subseteq P$, luego $x = \emptyset$;

V.2 para todo elemento $a \in \mathcal{L} - \{\emptyset\}$ existen puntos P tales que $P \subseteq a$;

V.3 si Q es un punto y $x \in \mathcal{L}$ cumple $a \subseteq x \subseteq a \cup Q$, luego $x = a$ o $x = a \cup Q$.

Para un reticulado atómico \mathcal{L} se define su *rango* como el número máximo de puntos compatibles cuyo supremo es igual a T.

De ahora en más, vamos a suponer que \mathcal{L} es un **reticulado completo, ortocomplementado, modular débil y atómico (de rango infinito)**, o sea, supondremos para \mathcal{L} que los axiomas I–V son válidos; y vamos a estudiar sus componentes **irreducibles**.

3.2. Las geometrías proyectivas. Un conjunto E y una familia G de subconjuntos de E se dice que es una **geometría proyectiva** si

GP1 existe una subclase de conjuntos en G , que llamaremos *líneas*, tales que para todo par de elementos $e_1, e_2 \in E$, que llamaremos *puntos*, existe exactamente una línea que los contiene;

GP2 dados tres puntos e_1, e_2, e_3 , con e_3 fuera de la línea que contiene a e_1 y e_2 , se tiene lo siguiente: si un punto e_4 está en la línea que une e_1 y e_2 , y otro punto e_5 está en la línea que une e_2 y e_3 , luego e_4 y e_5 definen una línea que se interseca en un punto a la línea que contiene a e_1 y e_3 (el axioma del triángulo);

GP3 un subconjunto $S \subseteq E$ cumple que $S \in G$ si y solo si por cada par de puntos contenidos en S la línea que los contiene también está contenida en S .

Se puede mostrar que la familia de subconjuntos G de una geometría proyectiva, junto con la inclusión de conjuntos, define un reticulado completo, atómico, irreducible y **modular**. Se dice que un reticulado L es **modular** si, $\forall a, b, c \in L$ se tiene

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c, \text{ siempre que } a \subseteq c.$$

Si un reticulado es distributivo, luego es modular, pero la recíproca no es cierta en general. Los reticulados modulares son modulares débiles (ver **III**).

Con respecto a la atomicidad del reticulado G , mencionemos que los puntos de G coinciden con los puntos de E . Su rango puede ser finito o infinito.

¹¹Puede mostrarse que la irreducibilidad tiene que ver con el principio de superposición. Por ende, la existencia de componentes irreducibles habla de la existencia de las llamadas *reglas de superselección*: restricciones a la validez del principio de superposición.

Ejemplos de reticulados que sean simultáneamente completos, atómicos, irreducibles y modulares están dados por los subespacios $L(V, D)$ de un espacio vectorial V sobre un anillo con división D , junto con la inclusión de subespacios. Los puntos de $L(V, D)$ son los subespacios unidimensionales de V . Existe una íntima relación entre las geometrías proyectivas y los reticulados $L(V, D)$.

Teorema 1. Dada una geometría proyectiva G de rango mayor o igual a 3, existe un anillo con división D , un espacio vectorial V sobre él, y un isomorfismo de reticulados $G \simeq L(V, D)$ que envía puntos en puntos. Tanto V como D están únicamente determinados por G , a menos de isomorfismos. (Para una demostración, ver Baer, 1952). ■

Si agregamos al reticulado G una ortocomplementación (ver el axioma **III** de la Sección 2.1), el isomorfismo de arriba define una ortocomplementación sobre $L(V, D)$. Cada vez que eso sucede, podemos definir en V un producto interno. Más precisamente,

Teorema 2. Dada una ortocomplementación en $L(V, D)$, existe un producto interno (\cdot, \cdot) en V , determinado a menos de un factor en D , tal que el complemento de cada subespacio de V , de dimensión o codimensión finita, es su complemento ortogonal con respecto a (\cdot, \cdot) . (Ver Jauch, página 129). ■

En particular, si en G definimos una ortocomplementación, podemos asegurar que el espacio V del Teorema 1 es un *espacio de pre-Hilbert* (i. e. la completación de V , como espacio métrico definido por (\cdot, \cdot) , es un espacio de Hilbert).

3.3. El embedding de \mathcal{L} en un espacio de Hilbert. Estamos cada vez más cerca del resultado buscado.

Teorema 3. Sea \mathcal{L} un reticulado que cumple los axiomas **I–V**. Luego existe una geometría proyectiva G y un embedding de reticulados $\mathcal{L} \hookrightarrow G$ que envía el ínfimo de cada subconjunto de \mathcal{L} al ínfimo del subconjunto de G correspondiente, los puntos de \mathcal{L} suryectivamente a los de G , y los supremos de conjuntos finitos de puntos en \mathcal{L} a los supremos correspondientes en G . Como consecuencia, a través de dicho embedding, la ortocomplementación en \mathcal{L} induce una en todo G . (Ver el libro de Jauch, página 127, y Piron, 1964). ■

De los teoremas de arriba se deduce el siguiente resultado.

Teorema 4. Sea \mathcal{L} un reticulado que cumple los axiomas **I–V**. Luego, existe un anillo con división D , un espacio de pre-Hilbert V sobre D con producto interno (\cdot, \cdot) , y una aplicación (inyectiva) $i: \mathcal{L} \hookrightarrow L(V, D)$ entre reticulados completos ortocomplementados tal que

- R.1** i es un embedding, i. e. $a \subseteq b$ si y solo si $i(a) \subseteq i(b)$, $\forall a, b \in \mathcal{L}$;
- R.2** $i(\bigcap_{i \in I} a_i) = \bigcap_{i \in I} i(a_i)$, para todo conjunto $\{a_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{L}$;
- R.3** i envía los puntos de \mathcal{L} a los de $L(V, D)$ en forma suryectiva;
- R.4** $i(\bigcup_{i \in I} e_i) = \bigcup_{i \in I} i(e_i)$, siendo I un conjunto finito y cada e_i un punto de \mathcal{L} ;
- R.5** $i(a') = i(a)'$, $\forall a \in \mathcal{L}$, y $i(a)'$ coincide con el complemento ortogonal $i(a)^\perp$ del subespacio $i(a)$, con respecto a (\cdot, \cdot) , siempre que a o a' sean de la forma $\bigcup_{i \in I} e_i$, siendo I un conjunto finito y cada e_i un punto de \mathcal{L} . ■

Este resultado nos permite describir a los elementos de \mathcal{L} en términos de los subespacios de un espacio de pre-Hilbert V . Dado que cada subespacio de V define un único proyector ortogonal, el embedding i estaría asociando a cada proposición de \mathcal{L} un proyector ortogonal sobre V . Puede mostrarse que, en términos de proyectores, las operaciones del reticulado $L(V, D)$ son:

- $E \subseteq F$ si y solo si $E \cdot F = E$;
- $E \cap F = \lim_{n \rightarrow \infty} (E \cdot F)^n$;
- $E \cup F = E + F - E \cdot F$;
- $E' = I - E$;
- $E \subseteq F'$ si y solo si $[E, F] = 0$.

Veamos qué nos dice esto sobre la manera en que podemos describir los estados y los observables del sistema físico definido por \mathcal{L} .

Según las definiciones hechas en la Sección 2.2, un observable es una aplicación

$$\mathcal{O} : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}, U \longmapsto \mathcal{O}_U,$$

que cumple los axiomas **O.1–O.3**. Luego, llamando $\text{Pr}(V)$ al conjunto de proyectores ortogonales de V , a partir de \mathcal{O} y del embedding i tenemos

$$P : B(\mathbb{R}) \longrightarrow \text{Pr}(V), U \longmapsto P_U$$

dada por $P = i \circ \mathcal{O}$, que cumple:

- O.1** $P_\emptyset = 0$ y $P_{\mathbb{R}} = I$,
- O.2** si $U \subseteq V^c$, luego $[P_U, P_V] = 0$,
- O.3** si $\{U_i : i \in I\} \subseteq B(\mathbb{R})$ cumple $U_i \subseteq U_j', \forall i \neq j \in I$, con I finito, y si cada P_{U_i} está asociado a un subespacio de dimensión finita (ver el punto **R.4** del Teorema 4), luego

$$P_{\bigcup_{i \in I} U_i} = \sum_{i \in I} P_{U_i}.$$

O sea, ¡ P es, esencialmente, una medida espectral! Luego, estamos recuperando los operadores hermíticos sobre un espacio de Hilbert. Por otro lado, la definición de estado hablaba de una aplicación $p : \mathcal{L} \rightarrow [0, 1]$ tal que se cumplen los axiomas **E.1–E.4**. Combinando p con i , podemos definir

$$\rho : \text{Pr}(V) \rightarrow [0, 1], i(a) \longmapsto p(a),$$

la cual cumple:

- E.1** $\rho(0) = 0$ y $\rho(I) = 1$;
- E.2** si $\{P_i : i \in I\} \subseteq \text{Pr}(V)$ cumple $[P_i, P_j] = 0, \forall i \neq j \in I$, siendo I un conjunto finito y cada proyector P_i está asociado a un subespacio de dimensión finita, luego

$$\rho(\sum_{i \in I} P_i) = \sum_{i \in I} \rho(P_i);$$

- E.3** si para $\{P_i : i \in I\} \subseteq \text{Pr}(V)$ se tiene que $\rho(P_i) = 1, \forall i \in I$, luego

$$\rho(\bigcap_{i \in I} P_i) = 1;$$

- E.4** si $E \neq F$, existe ρ tal que $\rho(E) \neq \rho(F)$.

Las aplicaciones de arriba están definidas, esencialmente (ver Gleason, 1957), por operadores $\rho \in \text{Lin}(V)$ definidos positivos y de traza 1, a través de la ecuación

$$\text{tr}(\rho \cdot P) = \rho(P).$$

De esta forma, vemos que un reticulado \mathcal{L} que cumpla los axiomas **I a V** (o mejor dicho, cada una de sus componentes irreducibles), y que tiene asociado un espacio de pre-Hilbert V , define algo “muy parecido” a un sistema cuántico sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} dado por la completación de V . Algo que queda por dilucidar es el asunto del anillo sobre el cual

está definido \mathcal{H} . En la Sección 1.2 dijimos que el espacio de Hilbert que define un sistema cuántico es complejo. El hecho de que asociados a los reticulados \mathcal{L} aparecen anillos más generales, plantea la pregunta: ¿por qué en la descripción de los sistemas cuánticos los números complejos juegan un rol privilegiado? ¿Se gana algo si uno considera espacios de Hilbert sobre anillos con división más generales? Hasta el momento solo se han dado respuestas parciales a estas preguntas (Finkelstein *et al.*, 1962). Podemos decir entonces que aún siguen abiertas.

APÉNDICE: ¿QUÉ ES UN SISTEMA FÍSICO?

Aunque seguramente no sea el enunciado más preciso ni el más satisfactorio que podamos elaborar sobre el rol de la Física como disciplina científica, vamos decir que *la Física se ocupa del estudio de las sensaciones o experiencias de un sujeto y, lo que es más importante, de la relación causal entre las mismas*.¹² Tal estudio se restringe a la relación causal entre pares de sensaciones (en lugar de relaciones n -arias, con n arbitrario), que llamaremos *estímulos y respuestas*. Y se supone que estas sensaciones son el resultado de una acción del sujeto o, más precisamente, de un determinado **procedimiento** o **experimento**: conjunto de actos debidamente prescriptos. Por ejemplo, consideremos los siguientes procedimientos: (1) darle un empujón a un carro, (2) medir la posición del carro en dos instantes de tiempo. Las sensaciones asociadas podrían ser: (1) el esfuerzo que debemos hacer para mover el carro, (2) la rapidez con la que el carro se mueve. Para eliminar el componente subjetivo de la idea de sensación, el estudio que en efecto realiza la Física es sobre los procedimientos y las relaciones entre ellos (binarias y causales). Llamaremos **preparación** a los procedimientos que producen los estímulos, y **medición** a los que producen las respuestas.

Vale aclarar que un procedimiento no es solo “la receta” de lo que hay que hacer, sino lo que uno termina haciendo a partir de esa receta. Por ejemplo, consideremos el lanzamiento de una pelota. Si damos la receta: “caminar desde el punto de lanzamiento hasta el punto donde la pelota quede en reposo” el procedimiento que realizaremos, que en este caso será caminar un determinado número de pasos, claramente va a depender de cuán lejos llegó la pelota: el número de pasos va a ser distinto en cada caso. Digamos también que un procedimiento puede representar el “no hacer nada”, i. e. el dejar que algo ocurra espontáneamente.¹³

Si en un burdo intento de sintetizar matemáticamente estas ideas llamamos P al conjunto de procedimientos, se podría definir a un **sistema físico** como un subconjunto

$$\mathcal{F} = E \times M, \quad \text{con } E, M \subseteq P.$$

O sea, un sistema físico quedaría definido al concentrarnos en ciertos pares de procedimientos: las preparaciones $E \subseteq P$ y mediciones $M \subseteq P$. La elección de procedimientos estará motivada por las sensaciones particulares que le producen al sujeto y que son de interés para él (o, mejor dicho, para la comunidad científica). En otras palabras, tal selección estará guiada por los estímulos y respuestas particulares que estos procedimientos generen, pues es la relación entre tales sensaciones lo que se busca entender. Cada criterio de selección define, en principio, un sistema físico diferente.¹⁴

¹²No vamos a dar aquí una definición de *sensación* ni de *relación causal*, sino que apelaremos a la noción intuitiva que el lector tenga de estos conceptos.

¹³Esto ocurriría, por ejemplo, si queremos estudiar el movimiento de un planeta.

¹⁴Se define en muchos casos a un sistema físico como una *porción aislada del universo para ser estudiada*. En esta definición están implícitas las ideas de preparación y medición. Si por universo entendemos todas las

El problema de la Física se reduce entonces a encontrar el subconjunto $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}$ que describe la relación causal entre las preparaciones y las mediciones seleccionadas.

Usualmente existen clases de mediciones que generan sensaciones idénticas (esencialmente la misma respuesta), salvo por su “intensidad”. Cada una de estas clases suele estar caracterizada por una receta que prescribe las acciones a realizar, siendo una de ellas la escritura de un número $r \in \mathbb{R}$. Todas las mediciones en la clase consisten en realizar exactamente las mismas acciones, salvo por el número que hay que escribir. Luego, cada clase puede identificarse con un subconjunto de \mathbb{R} . Para formalizar estas ideas, diremos que existe una relación de equivalencia en M tal que cada una de sus clases, a las cuales llamaremos **observables**, está en biyección con un subconjunto de \mathbb{R} . Si una medición dada pertenece a un observable \mathcal{O} y tiene asociado el número $r \in \mathbb{R}$ (vía la biyección recién mencionada), diremos que r es el *resultado de la medición de \mathcal{O}* .

Fijemos un observable \mathcal{O} , y concentrémonos en el subconjunto $E \times \mathcal{O} \subseteq \mathcal{F}$. En ciertos casos, la intersección

$$\mathcal{R} \cap (E \times \mathcal{O})$$

define una función. O sea, para cada preparación, la medición de \mathcal{O} arroja un único resultado $r \in \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}$. Se dice entonces que el sistema \mathcal{F} es *determinístico*. De lo contrario vamos a tener que, para cada elemento $e \in E$, existe más de un elemento $r \in \mathcal{O}$ tal que $(e, r) \in \mathcal{R}$. En ese caso, repitiendo la preparación e un número n de veces, y calculando las frecuencias $n_{\mathcal{O}}^e(r)/n$ de medir el valor r para el observable \mathcal{O} , es posible definir (al menos en teoría) la *probabilidad*

$$p_{\mathcal{O}}^e(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_{\mathcal{O}}^e(r)}{n}.$$

Es decir que, en general, podemos describir la relación \mathcal{R} a través de probabilidades.

Es posible que para distintas preparaciones e y e' se tenga que

$$p_{\mathcal{O}}^e(r) = p_{\mathcal{O}}^{e'}(r), \quad \forall \mathcal{O} \subset M, \quad \forall r \in \mathcal{O}.$$

En tal caso se considera dentro de E la relación de equivalencia: $e \sim e'$ si y solo si se cumple la ecuación de arriba. A las clases asociadas se las llama **estados del sistema**. Con este proceso estamos identificando los estímulos que producen las mismas respuestas.

Notar que podemos siempre asociar a \mathcal{F} un nuevo sistema físico tal que sus estados coincidan con sus preparaciones. Basta con tomar un representante de cada clase, y considerar al subconjunto de E así obtenido como el conjunto de preparaciones del sistema. Esto es lo que se suele hacer en la práctica.

Las ideas aquí vertidas han sido inspiradas por las discusiones que aparecen, en relación a la idea de sistema físico, en los libros Ballentine (2006), Haag (1993), Jauch (1968), y algunas de las referencias allí contenidas.

REFERENCIAS

- [1] R. Baer (1952), *Linear algebra and projective geometry*, Academic Press.
- [2] L. Ballentine (2006), *Quantum mechanics: A modern development*, World Scientific.
- [3] B. Davey, H. Priestley (2008), *Introduction to lattices and order*, Cambridge.
- [4] D. Finkelstein, J. Jauch, S. Schiminovich, D. Speiser (1962), *Foundations of quaternionic quantum mechanics*, J. Math. Phys. **3**, 207.
- [5] A. Gleason (1957), Measures on the closed subspaces of a Hilbert space. J. Math. Mech. **6**, 885–893.
- [6] R. Haag (1993), *Local quantum physics*, Springer-Verlag.

sensaciones del sujeto, al decir *porción aislada* estamos haciendo referencia a una selección de esas sensaciones, y por ende de procedimientos, conservando solo aquellos estímulos y respuestas que queremos estudiar.

- [7] J. Jauch (1968), *Foundations of quantum mechanics*, Addison-Wesley.
- [8] C. Piron (1964), Ph.D. Thesis, *Helv. Phys. Acta* **37**, 439.
- [9] V. Varadarajan (2007), *Geometry of quantum theory*, Springer.

INSTITUTO BALSEIRO – CENTRO ATÓMICO BARILOCHE
E-mail: `sergiog@cab.cnea.gov.ar`