ACTAS DEL XI CONGRESO
DR. ANTONIO A. R. MONTEIRO (2011)
2012, Páginas 3–15

CONTROL GEOMÉTRICO NO LINEAL

MARÍA ETCHECHOURY

RESUMEN. En estas notas presentamos una introducción a la teoría cualitativa de sistemas no lineales con control, poniendo principal énfasis en las propiedades de controlabilidad de tales sistemas. Introducimos algunas nociones de geometría diferencial que utilizaremos para el análisis de los sistemas con control, tales como: campos vectoriales, corchetes de Lie, distribuciones, foliaciones, etc., además de una de las herramientas básicas que es el teorema de la órbita de Stefan y Sussmann. Analizamos los problemas básicos de controlabilidad y damos criterios para la controlabilidad completa, accesibilidad y propiedades relacionadas, usando ciertas álgebras de Lie de campos vectoriales definidas para los sistemas en estudio. Ilustramos estos contenidos con ejemplos de sistemas simples o sistemas que aparecen en las aplicaciones.

1. CONTROLABILIDAD Y CORCHETES DE LIE

Las propiedades de *controlabilidad* de un *sistema con control* pueden relacionarse a las siguientes preguntas:

- ¿Puede un sistema "llevarse" desde un estado inicial x_0 a un estado final x_1?
- ¿Puede hacerse para cualquier par de estados inicial y final?
- ¿Cuál es el conjunto de puntos al que se puede llegar desde un estado inicial x_0 dado?
- ¿Qué trayectorias del sistema son realizables y cómo encontramos controles que las realicen?

Queremos desarrollar herramientas que nos permitan contestar algunas de estas preguntas y entender las propiedades cualitativas de los sistemas no lineales con control.

Los sistemas con control se representan en muchos casos por familias de campos vectoriales. La herramienta básica que permite estudiar las interacciones entre diferentes campos vectoriales es *el corchete de Lie.*

1.1. Sistemas con control. ¿Qué es un sistema con control? Se representa por la ecuación

$$\Sigma : \dot{x} = f(x,u), \tag{1}$$

donde x es el estado del sistema Σ, que toma valores en un abierto $X \subset \mathbb{R}^n$ (o en una variedad diferenciable de $\mathbb{R}^n$); u es el control que toma valores en un conjunto U (conjunto de controles), [1, 2].

Si $u \in U$ es fijo, $\dot{x} = f(x,u)$ resulta un sistema dinámico, luego Σ es una familia de sistemas dinámicos parametrizada por el control.

Ejemplo 1. *(i) Barco a motor sobre un lago: elegimos algún sistema de coordenadas de modo tal que el lago se identifica con algún subconjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ y el estado (posición) del barco con un punto $x = (x_1, x_2) \in X$.*

El modelo más simple del movimiento del barco es el siguiente sistema con control:

$$\dot{x} = u,$$

Palabras clave. Sistema con control; controlabilidad; accesibilidad.

donde el control $u = (u_1, u_2)$ *es el vector velocidad que pertenece a*

$$U = \{u \in \mathbb{R}^2 : \| u \| \leq m\};$$

m es la velocidad máxima que puede alcanzar el barco.

(ii) Barco a motor sobre un río: si el barco a motor está sobre un río, el conjunto de velocidades del barco $F(x)$ *en el punto x depende de la corriente del río en ese punto. Esto significa que en este caso nuestro modelo es:*

$$\dot{x} = f(x) + u,$$

donde $u \in U = \{u \in \mathbb{R}^2 : \| u \| \leq m\}$ *y* $f(x)$ *representa la velocidad de la corriente del río en el punto x. Luego* $F(x) = f(x) + U$ *es el conjunto de velocidades posibles en el punto x.*

1.2. Campos vectoriales y flujos. Consideramos un abierto $X \subset \mathbb{R}^n$ o X subvariedad suave de $\mathbb{R}^n$. Llamamos T_pX al espacio de vectores tangentes a X en p.

Definición 1. *Un campo vectorial sobre X es una aplicación*

$$p \in X \longrightarrow f(p) \in T_pX,$$

que asigna un vector tangente en p a cada punto p de X. En un sistema de coordenadas dado el campo f puede expresarse como

$$f = (f_1, \ldots, f_n)^T;$$

decimos que f es de clase $\mathscr{C}^k$ *si sus componentes son de clase* $\mathscr{C}^k$*.*

Supondremos en general que los campos vectoriales a considerar son de clase $\mathscr{C}^\infty$. El espacio de estos campos vectoriales es un espacio vectorial lineal al que llamaremos $V(X)$.

Si $f \in V(X)$, $\dot{x} = f(x)$ es una ecuación diferencial. Si $f \in \mathscr{C}^k$ y $k \geq 1$, para $p \in X$ existe un intervalo I abierto que contiene al 0 y una curva diferenciable

$$t \longrightarrow x(t) = \gamma_t(p), \ t \in I,$$

que satisface la ecuación diferencial y tal que $x(0) = \gamma_0(p) = p$.

La familia $\{\gamma_t\}$ de aplicaciones locales de X se llama *flujo local* del campo vectorial, y tiene las siguientes propiedades:

- $\gamma_{t_1} \circ \gamma_{t_2} = \gamma_{t_1+t_2}$,
- $\gamma_{-t} = (\gamma_t)^{-1}$,
- $\gamma_0 = id$.

Si la solución $\gamma_t(p)$ está bien definida $\forall t \in \mathbb{R}$ y $p \in X$, se dice que *f es un campo vectorial completo* y sus flujos forman un grupo de un parámetro de difeomorfismos de X.

Una familia monoparamétrica $\{\gamma_t\}$ de aplicaciones que satisface las condiciones anteriores define un único campo vectorial así

$$f(p) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \gamma_t(p), \tag{2}$$

cuyo flujo coincide con γ_t. Anotamos al flujo de un campo vectorial f por γ_t^f o e^{tf}.

Ejemplo 2. *El campo vectorial lineal Ax es completo y el correspondiente flujo es el grupo mono-paramétrico de transformaciones lineales* $p \longrightarrow e^{At}p$*, es decir,* $\gamma_t = e^{At}$*, con* $e^{At} = \sum_{i \geq 0} A^i \frac{t^i}{i!}$.

1.3. Corchete de Lie y propiedades. Un sistema no lineal con control se puede considerar como una colección de sistemas dinámicos (campos vectoriales) parametrizada por un parámetro de control. Las propiedades básicas del sistema dependen de las interconexiones entre los diferentes campos correspondientes a diferentes controles.

Definición 2 (Corchete de Lie)**.** *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ y sean f, g dos campos vectoriales sobre X. El corchete de Lie entre f y g es otro campo sobre X que se define como*

$$[f,g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x). \tag{3}$$

Ejemplo 3. $f = (1,0)^T$, $g = (0,x_1)^T$ *sobre* $\mathbb{R}^2$;

$$[f,g] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nota 1. *$[f,g]$ agrega una nueva dirección al espacio generado por f y g en el origen.*

Las siguientes son algunas propiedades de los corchetes de Lie:

1. El corchete de Lie entre dos campos vectoriales constantes es 0. El corchete de Lie entre un campo vectorial constante y uno lineal es constante. El corchete de Lie entre dos campos vectoriales lineales es lineal.
2. El corchete de Lie entre dos campos vectoriales f y g es nulo sii sus flujos conmutan, es decir
$$[f,g] \equiv 0 \Leftrightarrow \gamma_t^f \circ \gamma_s^g(p) = \gamma_s^g \circ \gamma_t^f(p), \ \forall s,t \in \mathbb{R}, \forall p \in X,$$
donde la igualdad se debe satisfacer para aquellos s, t, y p para los cuales ambos lados están bien definidos.

1.4. Cambios de coordenadas y corchetes de Lie. ¿Qué ocurre con los campos vectoriales y flujos bajo cambios de coordenadas?

Sea $\Phi : X \longrightarrow X$ un difeomorfismo global (o un difeomorfismo entre dos abiertos de X). Como los vectores tangentes se transforman por medio del Jacobiano del difeomorfismo, dicho difeomorfismo define la siguiente aplicación entre campos vectoriales:

$$Ad_\Phi : V(X) \longrightarrow V(X),\ Ad_\Phi(f)(p) = D\Phi(q)f(q),\ q = \Phi^{-1}(p),$$

siendo $D\Phi$ la aplicación tangente de Φ (representada, en coordenadas, por la matriz Jacobiana $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$). Otra notación usual para esta aplicación es

$$\Phi_* f = Ad_\Phi(f).$$

Nota 2. *El cambio de coordenadas $p = \Phi(q)$ transforma la ecuación diferencial $\dot{q} = f(q)$ en la ecuación diferencial $\dot{p} = \tilde{f}(p)$, con $\tilde{f} = Ad_\Phi f$.*

Nota 3. *Si Φ es un difeomorfismo gobal sobre X, entonces la operación Ad_Φ es un operador lineal sobre $V(X)$, es decir, $Ad_\Phi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 Ad_\Phi(f_1) + \lambda_2 Ad_\Phi(f_2)$. Además, si Ψ es otro difeomorfismo global sobre X, entonces*

$$Ad_{\Phi\circ\Psi}(f) = Ad_\Phi Ad_\Psi(f).$$

Las siguientes son algunas propiedades que vinculan cambios de coordenadas, flujos y corchetes de Lie.

1. El flujo local del campo vectorial $Ad_\Phi(f)$ es $\Phi \circ \gamma_t^f \circ \Phi^{-1}$.
2. Sea Φ un difeomorfismo (global o parcial) sobre X, entonces
$$[Ad_\Phi f, Ad_\Phi g] = Ad_\Phi [f,g].$$

3.
$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} Ad_{\gamma_t^f} g = -\left[f, Ad_{\gamma_t^f} g\right] = -Ad_{\gamma_t^f}([f,g]).$$

4. Si los campos f y g son analíticos reales, se tiene la siguiente expresión para g transformada según el flujo del campo f,
$$\left(Ad_{\gamma_t^f} g\right)(p) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-t)^i}{i!} (ad_f^i g)(p),$$
donde la serie converge absolutamente para t en un entorno del 0, y donde hemos llamado $ad_f g = [f,g]$ y $ad_f^i g = ad_f ad_f^{i-1} g$.

1.5. Campos vectoriales como operadores diferenciales. Un campo vectorial suave f sobre X define un operador lineal L_f sobre el espacio de las funciones $\mathscr{C}^\infty(X)$ así:
$$(L_f\phi)(p) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \phi(\gamma_t^f(p)) = \sum_{i=1}^{n} f_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(p).$$
Este operador se llama *derivada direccional a lo largo de* f, o *derivada de Lie a lo largo de* f, y es un operador diferencial de orden uno.

Recíprocamente, cualquier operador diferencial de orden uno sin término de orden cero puede escribirse como
$$L = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$
y define un único campo vectorial en coordenadas así $f = (a_1, \ldots, a_n)^T$. Luego existe una única correspondencia
$$f \longrightarrow L_f$$
entre campos vectoriales y operadores diferenciales de orden uno (sin término de orden cero). Es así como suele identificarse un campo vectorial f con su correspondiente operador diferencial L_f, y se escribe
$$L_f = f = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$
A partir de esta identificación podemos dar otra definición de corchete de Lie de dos campos vectoriales f y g como el *conmutador* de sus operadores asociados,
$$[L_f, L_g] := L_f L_g - L_g L_f.$$
Además se puede probar que el conmutador $[L_f, L_g]$ es un operador diferencial de orden uno que corresponde al corchete de Lie $[f,g]$. Es decir,
$$[L_f, L_g] = L_{[f,g]}.$$

Definición 3. *Un álgebra de Lie es un espacio lineal L con una aplicación bilineal* $[.,.] : L \times L \longrightarrow L$ *que satisface:*

1. $[f,g] = -[g,f]$, *antisimetría*,
2. $[f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] = 0$, *identidad de Jacobi*.

Un subespacio lineal K de L cerrado bajo el producto $[.,.]$ *se llama subálgebra de Lie de L. Una subálgebra de Lie generada por* $S \subset L$ *es la menor subálgebra de Lie de L que contiene a S. Un ideal de Lie de L es un subespacio lineal* $I \subset L$ *tal que* $[f,g] \in I$, *si* $f \in L$ *y* $g \in I$.

Ejemplo 4. *El espacio $gl(n)$ de todas las matrices cuadradas $n \times n$ con el conmutador*

$$[A,B] = AB - BA$$

es un álgebra de Lie. Las matrices antisimétricas forman una subálgebra de Lie de este álgebra.

Ejemplo 5. *El espacio $V(X)$ de campos vectoriales sobre una variedad suave X es un álgebra de Lie con el corchete de Lie como producto.*

Ejemplo 6. *En el álgebra de Lie de los campos vectoriales lineales existe un ideal formado por todos los campos constantes.*

Definición 4 (Corchete de Lie iterado)**.** *Una aplicación iterativa de la identidad de Jacobi y de la antisimetría del corchete de Lie da lugar a la siguiente definición. Sean $f_1, \ldots, f_k$ elementos de un álgebra de Lie L. Llamaremos corchete de Lie iterado de estos elementos a cualquier elemento de L que se obtiene a partir de ellos luego de aplicar en forma iterada el corchete de Lie en cualquier orden, por ejemplo $[[f_2, f_4], [f_2, f_3]]$. Corchetes de Lie iterados a izquierda son aquellos de la forma*

$$[f_{i_1}, \ldots, [f_{i_{k-1}}, f_{i_k}] \ldots].$$

Nota 4. *Cualquier corchete de Lie iterado de los campos $f_1, \ldots, f_k$ es una combinación lineal de corchetes de Lie iterados a izquierda de $f_1, \ldots, f_k$. Por ejemplo,*

$$[[f_1, f_4], [f_3, f_1]] = [f_1, [f_4, [f_3, f_1]]] - [f_4, [f_1, [f_3, f_1]]].$$

Definición 5 (Equivalencia de familias de campos vectoriales)**.** *Consideramos dos familias de campos vectoriales analíticos sobre X y $\tilde{X}$, respectivamente, parametrizadas por el mismo parámetro $u \in U$,*

$$F = \{f_u\}_{u \in U}, \; \tilde{F} = \{\tilde{f}_u\}_{u \in U}.$$

Llamamos a estas familias localmente equivalentes en los puntos p y $\tilde{p}$, respectivamente, si existe un difeomorfismo analítico local $\Phi : X \longrightarrow \tilde{X}$, $\Phi(p) = \tilde{p}$, que transforma localmente los campos vectoriales f_u en los campos $\tilde{f}_u$, es decir,

$$Ad_\Phi f_u = \tilde{f}_u, \quad \textit{para } u \in U,$$

localmente alrededor de $\tilde{p}$.

Llamamos $\mathscr{L}$ y $\tilde{\mathscr{L}}$ a las álgebras de Lie de los campos vectoriales generados por las familias F y $\tilde{F}$, respectivamente. Una familia de campos vectoriales se dice *transitiva* en un punto si su álgebra de Lie tiene rango completo en ese punto, es decir, los campos vectoriales en esa álgebra generan el espacio tangente completo en ese punto.

Utilizaremos la siguiente notación para corchetes de Lie iterados a izquierda:

$$f_{[u_1 u_2 \ldots u_k]} = [f_{u_1}, [f_{u_2}, \ldots, [f_{u_{k-1}}, f_{u_k}] \ldots]].$$

En particular, $f_{[u_1]} = f_{u_1}$.

Teorema 1. *Si las familias F y $\tilde{F}$ son transitivas en los puntos p y $\tilde{p}$, respectivamente, entonces son localmente equivalentes sii existe una aplicación lineal entre los espacios tangentes $L : T_p X \longrightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{X}$, tal que*

$$L f_{[u_1 u_2 \ldots u_k]}(p) = \tilde{f}_{[u_1 u_2 \ldots u_k]}(\tilde{p}),$$

para cualquier $k \geq 1$ y cualesquiera $u_1, \ldots, u_k \in U$.

2. Órbitas, distribuciones y foliaciones

En esta sección introduciremos algunas nociones y resultados que juegan un papel fundamental en el análisis de un sistema con control. Llamaremos X a un abierto de $\mathbb{R}^n$ o a una variedad diferenciable de dimensión n.

2.1. Distribuciones y Teorema Local de Frobenius. Una *distribución* sobre X es una aplicación
$$\Delta : X \longrightarrow TX = \bigcup_{p\in X} T_pX;$$
para $p \in X$, $\Delta(x) \subset T_pX$ es un subespacio del espacio tangente a X en p.

La distribución Δ es $\mathscr{C}^\infty$ si, localmente alrededor de cada punto p de X, existe una familia $\{f_\alpha\}$ de campos vectoriales $\mathscr{C}^\infty$ que genera Δ, es decir, $\Delta(p) = \mathrm{span}_\alpha\{f_\alpha(p)\}$.

La distribución Δ se dice *localmente finitamente generada* si la familia de campos $\{f_\alpha\}$ es finita. Δ se dice de dimensión k si $\dim\Delta(p) = k$, para todo $p \in X$; y se dice de dimensión finita si es de dimensión k, para algún k.

Un campo vectorial $f \in \Delta$ si $f(p) \in \Delta(p)$, para todo $p \in X$.

La distribución Δ se dice *involutiva* si dados $f, g \in \Delta$, entonces $[f,g] \in \Delta$.

Si Δ tiene un número finito de generadores $f_1,\dots,f_m$, entonces la involutividad de Δ significa
$$[f_i, f_j](p) = \sum_{k=1}^{m} \phi_{ij}^k(p) f_k(p),$$
con $i, j = 1,\dots m$, y ϕ_{ij}^k funciones $\mathscr{C}^\infty$.

Teorema 2 (Teorema local de Frobenius)**.** *Sea Δ una distribución involutiva de clase $\mathscr{C}^\infty$ y de dimensión k sobre X. Entonces, localmente alrededor de cada punto en X, existe un cambio de coordenadas suave que transforma Δ en la distribución constante,*
$$\mathrm{span}\{e_1,\dots,e_k\},$$
siendo $e_i = (0,\dots,1,\dots,0)$ el versor canónico, con 1 en el lugar i-ésimo.

Para enunciar una versión global de este teorema, así como otros teoremas relacionados a la transitividad de familias de campos vectoriales e integrabilidad de distribuciones, necesitaremos más definiciones.

2.2. Subvariedades y foliaciones. Se dice que $S \subset X$ es *subvariedad regular* de X de dimensión k si dado cualquier $x \in S$ existe un entorno U de x y $\Phi : U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ difeomorfismo sobre un subconjunto abierto V tal que
$$\Phi(U \cap S) = \{x = (x_1,\dots,x_n) \in V \,|\, x_{k+1} = 0,\dots,x_n = 0\}.$$
En otras palabras, una variedad regular de dimensión k es un subconjunto que localmente se representa como un pedazo de un subespacio de dimensión k (luego de un cambio de coordenadas).

$S \subset X$ se llama *subvariedad inmersa* de X de dimensión k si
$$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i,$$
con $S_1 \subset S_2 \ldots \subset S$, donde cada S_i es subvariedad regular de dimensión k. Si en particular S es regular, se puede tomar $S_i = S$ y entonces S es también subvariedad inmersa.

Nota 5. *Si dos campos f y g son tangentes a una subvariedad (inmersa) S entonces $[f,g]$ también lo es.*

Una *foliación* $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de X de dimensión k es una partición $X = \bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha$ de X en subvariedades disjuntas conexas (inmersas), llamadas *hojas de la foliación*, y que tienen la siguiente propiedad: para cualquier $x \in X$ existe un entorno U de x y un difeomorfismo $\Phi : U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ sobre un subconjunto abierto V tal que

$$\Phi((U\cap S_\alpha)_{cc}) = \{x = (x_1,\ldots,x_n) \in V \,|\, x_{k+1} = c_\alpha^{k+1},\ldots,x_n = c_\alpha^n\},$$

donde $(U\cap S_\alpha)_{cc}$ representa una componente conexa del conjunto $U\cap S_\alpha$ y la igualdad anterior debe valer para cualquier componente conexa; las constantes c_α^i dependen de la hoja de la foliación y de la elección de la componente conexa. Al igual que para subvariedades, la regularidad de la foliación está definida por la regularidad del difeomorfismo Φ.

Nota 6. *Supongamos que un campo vectorial g es tangente a la foliación $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$, o sea, es tangente a cada una de sus hojas. Entonces, si el flujo de otro campo vectorial f preserva la foliación (es decir, para cualquier punto $p \in S_\alpha$ existe un entorno U de p tal que la imagen de un pedazo de una hoja $\gamma_t^f(S_\alpha\cap U)$ está contenido en una hoja de la foliación, dependiendo de t, para t suficientemente chico), el corchete $[f,g]$ es tangente a la foliación.*

2.3. Órbitas de familias de campos vectoriales. Se considera una famila de campos vectoriales $\mathscr{F} = \{f_u\}_{u\in U}$, sobre X.

Se define *la órbita de un punto* $p \in X$ de esta familia como el conjunto de puntos de X alcanzables desde p a tramos por trayectorias de esta familia, es decir:

$$\mathrm{Orb}(p) = \{\gamma_{t_k}^{u_k}\circ\cdots\circ\gamma_{t_1}^{u_1}(p) \,|\, k\geq 1; u_1,\ldots,u_k\in U; t_1,\ldots,t_k\in\mathbb{R}\},$$

donde γ_t^u es el flujo del campo vectorial f_u.

La relación *q pertenece a la órbita de p* es una relación de equivalencia en X. Luego, X es unión disjunta de órbitas.

Llamamos Γ a la menor distribución sobre X que contiene a los campos vectoriales en la familia $\mathscr{F}$, es decir, $f_u(p)\in\Gamma(p), \forall u\in U$, y tal que además es *invariante* bajo cualquier flujo γ_t^u, $u\in U$, es decir

$$D\gamma_t^u(p)\Gamma(p) = Ad_{\gamma_t^u}\Gamma(p) \subset \Gamma(\gamma_t^u(p)),$$

para todo $p\in X$, $u\in U$ y t para los cuales la expresión anterior está bien definida.

Otra manera equivalente de escribir la definición de invariancia es:

$$g\in\Gamma \Longrightarrow Ad_{\gamma_t^u} g\in\Gamma,$$

para todo $u\in U$ y $t\in\mathbb{R}$.

El siguiente resultado, [3, 4], establece una de las herramientas básicas para tratar con los sistemas con control.

Teorema 3 (Teorema de la órbita de Sussmann-Stefan)**.** *Cada órbita $S = \mathrm{Orb}(p)$ de la familia de campos vectoriales $\mathscr{F} = \{f_u\}_{u\in U}$ es una subvariedad inmersa (de clase $\mathscr{C}^k$, si los campos vectoriales f_u son de clase $\mathscr{C}^k$). Además, el espacio tangente a esta subvariedad está dado por la distribución Γ, es decir:*

$$T_pS = \Gamma(p), \quad \forall p\in X.$$

Corolario 1. *Si los campos vectoriales f_u son analíticos, entonces el espacio tangente a la órbita puede calcularse como*

$$T_pS = L(p) = \{g(p) \,|\, g\in \mathrm{Lie}\{f_u\}_{u\in U}\},$$

donde $\mathrm{Lie}\{f_u\}_{u\in U}$ *representa la menor familia de campos vectoriales que contiene a* $\mathscr{F}$ *y es cerrada bajo combinaciones lineales y corchetes de Lie; se trata del álgebra de Lie de los campos vectoriales generados por la familia* $\mathscr{F} = \{f_u\}_{u\in U}$. *En el caso* $\mathscr{C}^\infty$ *se tiene*

$$L(p) \subset T_pS.$$

Ejemplo 7. *El siguiente sistema en el plano,*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1x_1, \quad |u_1| \le 1, \\ \dot{x}_2 &= u_2x_2, \quad |u_2| \le 1, \end{aligned}$$

representado por la familia de campos vectoriales

$$f_u = (u_1x_1, u_2x_2)^T,$$

tiene 4 *órbitas de dimensión* 2 *(los cuadrantes abiertos),* 4 *órbitas de dimensión* 1 *(semi-ejes abiertos) y una órbita de dimensión* 0 *(el origen).*

Ejemplo 8. *Consideramos la familia de los siguientes campos vectoriales* $\mathscr{C}^\infty$ *en el plano*

$$f_1 = (1,0)^T, \; f_2 = (0, \phi(x_1))^T,$$

donde $\phi(y)$ *es una función suave sobre* $\mathbb{R}$ *positiva para* $y < 0$ *(por ejemplo,* $\phi(y) = \exp(1/y)$*) e igual a* 0 *si* $y \ge 0$. *La órbita de cualquier punto es todo* $\mathbb{R}^2$ *y por el teorema de la órbita se tiene que* $\dim\Gamma(p) = 2$, *para cualquier* p. *Por otro lado, se tiene que* $L(p)$ *está generada solo por el primer campo, cuando* $x_1 \ge 0$, *luego* $\dim L(p) = 1$. *Esto muestra que en el caso no analítico la igualdad* $\Gamma(p) = L(p)$ *puede no valer.*

Corolario 2. *Si* $\dim L(p) = n$, *para cualquier* $p \in X$, *entonces cualquier punto de* X *es alcanzable desde cualquier otro punto por tramos de trayectorias de la familia* $\mathscr{F} = \{f_u\}_{u\in U}$ *(permitiéndose tiempos positivos y negativos), es decir* $\mathrm{Orb}(p) = X, \forall p$.

2.4. Integrabilidad de distribuciones y foliaciones. Una distribución Δ de dimensión constante es *integrable* si existe una foliación $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ sobre X tal que, para cada $p \in X$,

$$T_pS = \Delta(p),$$

siendo S la hoja de la foliación que pasa por p. Encontrar la foliación que satisface la condición anterior se llama *integrar la distribución,* mientras que la foliación y sus hojas se llaman *foliación integral* y *variedades integrales* de la distribución, respectivamente.

Teorema 4 (Teorema Global de Frobenius)**.** *Una distribución suave* Δ *de dimensión constante es integrable sii es involutiva. La foliación integral de* Δ *es la partición de* X *en órbitas de la familia de campos vectoriales* $\mathscr{F} = \{g \,|\, g \in \Delta\}$.

Para definir integrabilidad de distribuciones que no son de dimensión constante hace falta relajar la definición de foliación.

Una *foliación con singularidades* es una partición

$$X = \bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha$$

de X en subvariedades inmersas tal que, localmente, existe una familia de campos vectoriales $\{g_\beta\}_{\beta\in B}$ con $T_pS_\alpha = \mathrm{span}\{g_\beta(p) \,|\, \beta \in B\}$, para todo p y α.

Una distribución sobre X se dice *integrable* si existe una foliación con singularidades $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ que satisface $T_pS = \Delta(p)$, $\forall p \in S$, siendo S la hoja de la foliación que pasa por p.

Teorema 5 (Teorema de Nagano)**.** *Cualquier distribución* Δ *analítica e involutiva es integrable.*

3. Controlabilidad y accesibilidad

En esta sección trabajaremos con dos clases de sistemas con control, los sistemas no lineales generales y los afines en el control. Los primeros se representan como

$$\Sigma: \ \dot{x} = f(x,u),$$

con $x(t) \in X$, $u(t) \in U$. Los segundos tienen la forma

$$\Sigma_{\text{afin}}: \ \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x),$$

donde $x(t) \in X$ y $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t)) \in U$. Suponemos que X es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ o una variedad suave de dimensión n. El conjunto de controles U es un conjunto arbitrario, con al menos dos elementos en el caso del sistema Σ, y un subconjunto de $\mathbb{R}^m$ en el caso del sistema Σ_{afin}. Los campos $f_u = f(.,u)$ definidos por Σ se suponen de clase $\mathscr{C}^\infty$, al igual que los campos $f, g_1, \ldots, g_m$ definidos por Σ_{afin}. No necesitaremos regularidad de $f(x,u)$ con respecto a u cuando trabajemos con controles constantes a trozos. En otros casos, supondremos que $f(x,u)$ y sus derivadas parciales respecto de u son funciones suaves con respecto a x y continuas con respecto a (x,u).

3.1. Definiciones básicas.

Definición 6. *El conjunto alcanzable desde $p \in X$ es el conjunto de puntos que se pueden alcanzar desde el punto p por el sistema Σ; lo simbolizamos $\mathscr{R}(p)$. Para el caso de controles constantes a trozos resulta*

$$\mathscr{R}(p) = \{\gamma_{t_k}^{u_k} \circ \cdots \circ \gamma_{t_2}^{u_2} \circ \gamma_{t_1}^{u_1}(p), k \geq 1, u_1, \ldots, u_k \in U, t_1, \ldots, t_k \geq 0\}.$$

$\mathscr{R}_t(p)$ es el subconjunto de $\mathscr{R}(p)$ tal que $t_1 + t_2 + \ldots + t_k = t$ y se llama conjunto alcanzable desde p en el tiempo t.

$\mathscr{R}_{\leq t}(p)$ es el subconjunto de $\mathscr{R}(p)$ tal que $t_1 + t_2 + \ldots + t_k \leq t$ y se llama conjunto alcanzable desde p hasta el tiempo t.

Ejemplo 9. *Consideramos el sistema en $\mathbb{R}^2$,*

$$\dot{x}_1 = u_1^2,$$
$$\dot{x}_2 = u_2^2,$$

con $U = \mathbb{R}^2$. En este caso el conjunto alcanzable desde el origen es el primer cuadrante. □

Definición 7. *Decimos que el sistema Σ es accesible desde p si $\mathscr{R}(p)$ tiene interior no vacío; análogamente se dice que Σ es fuertemente accesible desde p si $\mathscr{R}_t(p)$ tiene interior no vacío para cualquier $t > 0$.*

3.2. Linealización de Taylor. Daremos una condición suficiente para la accesibilidad fuerte. Supondremos que el conjunto de controles admisibles son los controles continuos a trozos con valores en $U \subset \mathbb{R}^m$.

Sea (x_0, u_0) un punto de equilibrio del sistema Σ, es decir $f(x_0, u_0) = 0$. Supongamos que f es de clase $\mathscr{C}^1$ con respecto a (x,u). Llamamos

$$A(x,u) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,u), \quad B(x,u) = \frac{\partial f}{\partial u}(x,u),$$

y sean $A_0 = A(x_0, u_0)$, $B_0 = B(x_0, u_0)$.

Teorema 6. *Si $u_0 \in \operatorname{int} U$ y el par (A_0, B_0) satisface la condición de rango de controlabilidad para sistemas lineales, es decir,*

$$rg(B_0, A_0B_0, A_0^2B_0, \ldots, A_0^{n-1}B_0) = n,$$

entonces el sistema Σ es fuertemente accesible desde x_0.

Un resultado análogo fuera del equilibrio se puede enunciar así. Sea $u^*(.)$ un control admisible y sea $x^*(.)$ la correspondiente trayectoria del sistema Σ. Llamamos

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*(t), u^*(t)), \quad B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(x^*(t), u^*(t)).$$

Teorema 7. *Si $u^*(t) \in \operatorname{int} U$ y el sistema lineal variante en el tiempo*

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(0) = 0,$$

sin restricciones sobre el control, es controlable sobre el intervalo $[0, T]$, entonces el conjunto alcanzable $\mathscr{R}_T(x_0)$ del sistema Σ tiene interior no vacío. En particular, si el grassmanniano

$$G(0,t) = \int_0^t S(\tau)B(\tau)B^T(\tau)S^T(\tau)d\tau,$$

con $S(t)$ solución fundamental de $\dot{S}(t) = A(t)S(t)$, $S(0) = I$, tiene rango n para algún $t > 0$, entonces el sistema Σ es fuertemente accesible desde x_0.

3.3. Álgebras de Lie de sistemas con control. Consideramos el sistema con control Σ y los campos vectoriales asociados $f_u(.) = f(., u)$; sean las familias de campos vectoriales $\mathscr{F} = \{f_u\}_{u \in U}$ y $\mathscr{G} = \{f_u - f_v,\ u, v \in U\}$. Se define el *álgebra de Lie del sistema* Σ como el menor espacio lineal $\mathscr{L}$ de campos vectoriales sobre X que contiene a $\mathscr{F}$ y es cerrado bajo corchetes de Lie:

$$f_1, f_2 \in \mathscr{L} \Longrightarrow [f_1, f_2] \in \mathscr{L}.$$

Se define el *ideal de Lie del sistema* Σ como el menor espacio lineal $\mathscr{L}_0$ en $\mathscr{L}$ de campos vectoriales sobre X que contiene a $\mathscr{G}$ y tal que es cerrado bajo corchetes de Lie:

$$f_1 \in \mathscr{L}, f_2 \in \mathscr{L}_0 \Longrightarrow [f_1, f_2] \in \mathscr{L}_0.$$

Nota 7. *Se puede ver a partir de las definiciones anteriores que tanto $\mathscr{L}$ como $\mathscr{L}_0$ pueden definirse equivalentemente por corchetes de Lie sucesivos así:*

$$\mathscr{L} = \operatorname{span}\{[f_{u_1}, \ldots, [f_{u_{k-1}}, f_{u_k}] \ldots] \,|\, k \geq 1,\, u_1, \ldots, u_k \in U\}.$$
$$\mathscr{L}_0 = \operatorname{span}\{[f_{u_1}, \ldots, [f_{u_{k-1}}, f_{u_k} - f_{u_{k+1}}] \ldots] \,|\, k \geq 1,\, u_1, \ldots, u_{k+1} \in U\}.$$

Para el sistema afín en el control Σ_{afin} se tiene:

$$\mathscr{L} = \operatorname{Lie}\{f, g_1, \ldots, g_m\} = \operatorname{span}\{[g_{i_1}, \ldots, [g_{i_{k-1}}, g_{i_k}] \ldots] \,|\, k \geq 1,\, 0 \leq i_1, \ldots, i_k \leq m\},$$
$$\mathscr{L}_0 = \operatorname{span}\{[g_{i_1}, \ldots, [g_{i_{k-1}}, g_{i_k}] \ldots] \,|\, k \geq 1,\, 0 \leq i_1, \ldots, i_k \leq m,\, i_k \neq 0\},$$

donde $g_0 = f$.

Además,

$$\mathscr{L} = \operatorname{span}\{f_{u*}, \mathscr{L}_0\},$$

siendo u^* cualquier elemento fijo de U.

Ejemplo 10 (El álgebra de Lie y el ideal de Lie de un sistema lineal)**.** *Consideramos el sistema lineal*

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i,$$

donde b_i son campos vectoriales constantes. Teniendo en cuenta que $g_1 = b_1, \dots, g_m = b_m$, $f = g_0 = Ax$, y que el corchete de Lie entre campos vectoriales constantes es cero, se tiene que en la fórmula de $\mathscr{L}_0$ los únicos corchetes de Lie iterados no nulos son

$$[AX, b_i] = -Ab_i, \quad [Ax, [AX, b_i]] = [Ax, -Ab_i] = A^2 b_i, \dots,$$
$$ad_{Ax} \dots ad_{Ax} b_i = ad_{Ax}^j b_i = (-1)^j A^j b_i.$$

El ideal de Lie es

$$\mathscr{L}_0 = \operatorname{span}\{A^j b_i \,|\, j \geq 0,\, 1 \leq i \leq m\},$$

que por el teorema de Cayley–Hamilton resulta

$$\mathscr{L}_0 = \operatorname{span}\{A^j b_i \,|\, 0 \leq j \leq n-1,\, 1 \leq i \leq m\}.$$

Además a partir del ideal de Lie $\mathscr{L}_0$ podemos calcular el álgebra de Lie $\mathscr{L}$ así:

$$\mathscr{L} = \operatorname{span}\{Ax, \mathscr{L}_0\}.$$

3.4. Criterios de accesibilidad. Dada una familia de campos vectoriales $\mathscr{H}$ definidos sobre X y dado $x \in X$, se define:

$$\mathscr{H}(x) = \operatorname{span}\{h(x) \mid h \in \mathscr{H}\}.$$

En particular, $\mathscr{L}(x)$ y $\mathscr{L}_0(x)$ son los espacios de vectores tangentes en x definidos por el álgebra de Lie $\mathscr{L}$ y el ideal de Lie $\mathscr{L}_0$ del sistema Σ, respectivamente.

Enunciamos ahora un resultado fundamental sobre accesibilidad, [5].

Teorema 8 (Sussmann-Jurdjevic)**.** *(a) Si para un sistema suave Σ el álgebra de Lie asociada $\mathscr{L}$ es de rango completo en x_0, es decir $\dim \mathscr{L}(x_0) = n$, entonces $\mathscr{R}_{\leq t}(x_0)$ tiene interior no vacío, resultando entonces un sistema accesible desde x_0.*

(b) Si el sistema Σ es analítico y $\dim \mathscr{L}(x_0) < n$, entonces el sistema no es accesible desde x_0.

Demostración. Parte (a):

Por ser $\dim \mathscr{L}(x_0) = n$, se tiene que $\dim \mathscr{L}(x) = n$, para todo x en un entorno de x_0 (el rango completo se alcanza por n campos vectoriales linealmente independientes en un entorno de x_0). Por la misma hipótesis existe $u_1 \in U$ tal que $f_{u_1}(x_0) \neq 0$. De otro modo, a partir de la definición de corchete de Lie se tendría que todos los campos vectoriales de $\mathscr{L}$ se anularían en x_0 y entonces $\dim \mathscr{L}(x_0) = 0$. La trayectoria $\gamma_t^{u_1} x_0$, $t \in V_1 = (0, \varepsilon_1)$, $\varepsilon_1 > 0$, es una subvariedad de X de dimensión 1, que llamamos S_1.

Podemos asegurar, además, que existe $u_2 \in U$ tal que los campos f_{u_1} y f_{u_2} son linealmente independientes en algún punto $x_1 \in S_1$. Si así no fuera, todos los campos vectoriales de $\mathscr{F}$ serían tangentes a S_1, y como combinaciones lineales o corchetes de Lie entre campos tangentes a una variedad resultan campos también tangentes a esa variedad, se tendría que todos los campos en $\mathscr{L}$ serían tangentes a S_1, lo cual contradice que $\dim \mathscr{L}(x_0) = n$ (si $n > 1$).

Sean f_{u_1} y f_{u_2} campos linealmente independientes en $x_1 = \gamma_{t_1}^{u_1} x_0 \in S_1$, $0 < t_1 < \varepsilon_1$. Definimos la aplicación

$$(t_1, t_2) \longrightarrow x = \gamma t_2{}^{u_2} \circ \gamma t_1{}^{u_1}(x_0),$$

con $(t_1, t_2) \in V_2 = (0, \varepsilon_1) \times (0, \varepsilon_2)$, $\varepsilon_2 > 0$. Para ε_2 suficientemente chico la imagen de esta aplicación contiene una subvariedad de X de dimensión 2 que llamamos S_2.

Por un argumento similar al de antes existen $x_3 \in U$ y un punto $x_2 \in S_2$ tal que el campo f_{u_3} no es tangente a S_2 en x_2. Entonces la imagen de la aplicación

$$(t_1, t_2, t_3) \longrightarrow x = \gamma_{t_3}^{u_3} \circ \gamma_{t_2}^{u_2} \circ \gamma_{t_1}^{u_1}(x_0),$$

con $(t_1,t_2,t_3) \in V_3 = (0,\varepsilon_1)\times(0,\varepsilon_2)\times(0,\varepsilon_3)$, $\varepsilon_3 > 0$, contiene una subvariedad S_3 de X de dimensión 3. Observar que S_i, $i = 1,2,3$, son subconjuntos del conjunto alcanzable.

Luego de n pasos obtenemos una subvariedad S_n de X de dimensión n, es decir, un subconjunto abierto de X, que está contenido en el conjunto alcanzable $\mathscr{R}_{\leq t}(x_0)$, donde $t = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$. Como $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ pueden tomarse arbitrariamente chicos, se tiene que el conjunto $\mathscr{R}_t(x_0)$, $t > 0$ tiene interior no vacío.

Parte (b):

Por el corolario del Teorema de la órbita se tiene que el espacio tangente a la órbita en x_0 es $\mathscr{L}(x_0)$. Cuando $\dim \mathscr{L}(x_0) < n$, se tiene que esta órbita es una subvariedad de dimensión menor que n. Luego su interior es vacío. Como el conjunto alcanzable es un subconjunto de la órbita, su interior también es vacío. □

Corolario 3. *Si el sistema Σ es analítico, entonces el interior en la órbita* $\mathrm{Orb}(x_0)$ *del conjunto alcanzable $\mathscr{R}(x_0)$ es distinto de vacío.*

Ejemplo 11. *Consideramos el siguiente sistema con un control escalar $u \in U = \mathbb{R}$:*

$$\dot{x}_1 = u,$$
$$\dot{x}_2 = x_1^k, \quad k \geq 2.$$

El sistema es afín en el control con $f = (0,x_1^k)^T$ y $g = (1,0)^T$. Entonces

$$[g,f] = (0,kx_1^{k-1})^T, \quad [g,[g,f]] = (0,k(k-1)x_1^{k-2})^T, \quad ad_g^k f = (0,k!)^T,$$

luego $\dim \mathscr{L}_0(x) = \dim \mathscr{L}(x) = 2$, *para todo x; en particular el sistema es fuertemente accesible desde el origen.*

Si consideramos ahora el ideal de Lie $\mathscr{L}_0$ se tiene el siguiente resultado:

Teorema 9. *(a) Si el sistema Σ es suave y* $\dim \mathscr{L}_0(x_0) = n$*, entonces $\mathscr{R}_t(x_0)$ tiene interior no vacío para cualquier $t > 0$. (b) Si* $\dim \mathscr{L}_0(x_0) < n$*, entonces* $\mathrm{int}\mathscr{R}_t(x_0) = \emptyset$ *para cualquier $t > 0$.*

Ejemplo 12. *Consideramos el sistema sobre $\mathbb{R}^2$*

$$\dot{x}_1 = 1,$$
$$\dot{x}_2 = ux_1^2,$$

y tomamos $x_0 = (0,0)$ y $U = \mathbb{R}$. Se tiene

$$\mathscr{F} = \{(1,ux_1^2)^T \mid u \in \mathbb{R},\}, \quad \mathscr{G} = \mathrm{span}\{(0,x_1^2)^T\}.$$

El álgebra de Lie $\mathscr{L}$ generada por $\mathscr{F}$ contiene los campos vectoriales

$$f_1 = (1,0)^T,\ f_2 = (1,x_1^2)^T,\ f_3 = [f_1,f_2] = (0,2x_1)^T,\ [f_1,f_3] = (0,2)^T.$$

Luego, $\dim \mathscr{L}(x_0) = 2$ *y entonces el sistema es accesible desde x_0. Por otro lado $\mathscr{L}_0(x_0) =$* $\mathrm{span}\{(0,1)^T\}$ *y entonces el interior del conjunto alcanzable en el tiempo t, $t > 0$, es vacío. En efecto, puede probarse que $\mathscr{R}(x_0)$ coincide con el semiplano derecho abierto y el origen, mientras que $\mathscr{R}_t(x_0)$ es igual al conjunto $\{x_1 = t, x_2 \in \mathbb{R}\}$.*

Ejemplo 13. *Se considera una nave espacial con dos chorros localizados de modo tal que los momentos angulares son paralelos a los ejes principales de la nave. Entonces, las* *ecuaciones de movimiento para velocidades angulares son*

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= a_1\omega_2\omega_3 + u_1\\ \dot{\omega}_2 &= a_2\omega_3\omega_1 + u_2\\ \dot{\omega}_3 &= a_3\omega_1\omega_2,\end{aligned}$$

donde las constantes están dadas por los momentos de inercia principales: $a_1 = (I_2 - I_3)/I_1$, $a_2 = (I_3 - I_1)/I_2$ *y* $a_3 = (I_1 - I_2)/I_3$. *El sistema es afín en el control con*

$$f = (a_1\omega_2\omega_3, a_2\omega_3\omega_1, a_3\omega_1\omega_2)^T, \quad g_1 = (1,0,0)^T, \quad g_2 = (0,1,0)^T.$$

Se tiene que

$$[f,g_1] = -(0, a_2\omega_3, a_3\omega_2)^T, \quad [f,g_2] = -(a_1\omega_3, 0, a_3\omega_1)^T,$$
$$[g_1,[g_2,f]] = (0,0,a_3)^T.$$

Se ve fácilmente que

$$\dim \mathscr{L}_0(x) = 3 \Longleftrightarrow \dim \mathscr{L}(x) = 3 \Longleftrightarrow a_3 \neq 0,$$

para cualquier $x = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. *Se tiene entonces que el sistema es accesible (equivalentemente fuertemente accesible) si y solo si* $I_1 \neq I_2$.

REFERENCIAS

[1] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems.* Springer-Verlag. (1995).

[2] E. Sontag. *Mathematical Control Theory.* Springer Verlag. (1998).

[3] H. Sussmann, *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans. Amer. Math. Soc., 180 (1973), 171–188.

[4] P. Stefan, *Integrability of systems of vector fields*, J. London Math. Soc. (2) 21 (1980), no. 3, 544–556.

[5] H. Sussmann, and V. Jurdjevic, *Controllability of nonlinear systems*, J. Differential Equations 12 (1972), 95–116.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
E-mail: marila.mate@gmail.com