Cálculo del Ancho de Banda Efectivo para un Flujo Markoviano con tasas de transferencia continuas

Beatriz Marrón[†]

[†]*Universidad Nacional del Sur, beatriz.marron@uns.edu.ar*

Resumen: El objetivo de este trabajo es generalizar el cálculo del ancho de banda efectivo asociado al flujo X_t, para el caso en que la fuente puede asumir distintos estados y la velocidad con que despacha información es una variable aleatoria continua que depende del estado en que se encuentra la fuente.

Más precisamente, suponemos que una fuente en una red de datos asume en el instante s, el estado Z_s, donde Z_s es una cadena de Markov homogénea, a tiempo continuo e irreducible, con espacio de estados $\{1, \cdots, k\}$ y distribución invariante π. Cuando la cadena Z_s alcanza el estado i, la velocidad Y_s con la cual la fuente transmite datos es una variable aleatoria continua, independiente de la cadena Z, con función de densidad f_i, $1 \leq i \leq k$.

Definimos entonces, Flujo Markoviano modulado por Y_t, al proceso

$$X_t = \int_0^t Y_s \, ds,$$

que representa el trabajo acumulado en el intervalo $[0, t]$ recibido desde la fuente.

El cálculo del Ancho de Banda Efectivo se realiza mediante la generalización de fórmulas del tipo Kesidis-Walrand-Chang.

Palabras clave: *Flujo Markoviano, ancho de banda efectivo.*

1. Introducción

La telecomunicación se está desarrollando cada vez más hacia las redes digitales se servicios integrados, es decir redes capaces de transportar distintos tipos de información como video, voz, datos, todos ellos en forma digital y en muchos casos en tiempo real. Este tipo de redes de telecomunicación se modelan mediante un sistema multiplexor, donde varios flujos de datos comparten una única salida y podemos pensar al sistema como un servidor que puede procesar el trabajo que recibe desde varias fuentes distintas a una tasa constante c, además puede almacenar en un buffer hasta una cierta cantidad b de unidades de trabajo pero el trabajo que arriba cuando el buffer está completo se descarta y por lo tanto nunca será procesado.

Un ejemplo de este tipos de redes es la Internet, cuya política tradicional de trabajo es el "Best effort": hacer lo que puede dividiendo sus recursos entre todas las solicitudes. Si en un instante muchas comunicaciones deben usar un mismo enlace de salida, los paquetes se van almacenando en cola (buffers) esperando su turno, esto produce retardo y si el buffer se llena los paquetes se pierden. Las aplicaciones tradicionales de Internet son los mails, la transferencia de archivos y el uso de la Web donde los retardos no afectan demasiado y las pérdidas se solucionan con retransmisiones pero en los nuevos servicios que puede ofrecer la Internet como son las comunicaciones de voz y video, tanto el retardo como la pérdida de paquetes son críticas. La causa más significativa de retardo y pérdidas de paquetes en los buffers, es el exceso de tráfico en el canal de transmisión, por lo que es necesario proponer modelos estocásticos y técnicas estadísticas que permitan controlar las probabilidades de congestión o de pérdida de paquetes y establecer condiciones para poder realizar cada tarea demandada.

Conocer entonces, cuanto de los recursos disponible necesita cada conexión tiene aplicación directa a lo que se llama control de admisión de conexiones (CAC) ya que una nueva conexión puede ser aceptada si hay suficientes recursos disponibles y el precio de la conexión debería ser, de alguna forma, proporcional a los recursos necesarios. Al tomar la decisión de aceptar una nueva conexión, se deber estimar cuanto ocupará esta en el canal de comunicación, para saber si al añadir el nuevo tráfico se puede mantener la calidad de servicio (QoS), tanto de la nueva conexión como de las ya existentes.

Hay dos límites claros para estos requerimientos: por un lado se podría reservar la tasa máxima de transmisión para cada conexión que daría lugar a un multiplexor determinístico ,y si bien no hay posibilidad de “*buffer overflow*”es decir no queda trabajo sin procesar, la utilización del enlace es muy pobre. Por otro lado, se podría reservar la tasa media de transmisión para cada conexión, que permite utilizar en media el cien por ciento del enlace, pero es inevitable que exista “*buffer overflow*”.

Entonces, dada una cierta QoS requerida (probabilidad de pérdida de trabajo, retardo en el tiempo de procesamiento, etc.) la cantidad de recursos que deberá reservarse para cada conexión, está en algún lugar entre la tasa media y la tasa máxima de dicha conexión. Esta cantidad se conoce generalmente como *ancho de banda efectivo* y es entonces una medida del uso de los recursos.

El concepto de ancho de banda efectivo introducido por Kelly en [5], es una medida útil de la ocupación del canal de transmisión, cuyo sustento teórico proviene de la teoría de grandes desvíos y cuyas propiedades la hacen una medida apropiada. Aplicaciones de esta magnitud a las redes de telecomunicación de presentan en [8, 4] entre otros. En nuestro caso, hemos trabajado sobre el modelo conocido como Flujo Markoviano que es aceptado en la literatura para datos provientes de video MPEG. Para este tipo de modelos Keisidis, Walrang y Chang presentaron en [6] una expresión para el ancho de banda efectivo, cuando las tasas de transferencias son constantes. El objetivo de este trabajo es generalizar el modelo para tasas de transferencias aleatorias y encontrar una expresión para el el ancho de banda efectivo.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en la Sección 2 se presenta el Ancho de Banda Efectivo y sus propiedades, en la Sección 3 presentamos el resultado principal, en la Sección 4 se presentan las conclusiones y futuras líneas de trabajo.

2. ANCHO DE BANDA EFECTIVO

En este trabajo X_t representa la cantidad de trabajo acumulado (*work load*) que llega a un switch desde una fuente en el intervalo $[0, t]$. Consideremos un proceso estocástico Y_s que sólo puede asumir una cantidad finita de valores $h_1, \cdots, h_k$. Supongamos que Y_s representa el trabajo instantáneo que arriba al switch (por ejemplo en Mbs) que puede llegar en k estados diferentes con tasas de transferencias (en Mbs) $h_1, \cdots, h_k$ respectivamente. Por ejemplo h_1 podría ser cero, es decir no se transmite; h_2 una tasa baja por ejemplo cuando se transmite un mail; h_3 una tasa alta por ejemplo cuando se transmite una imagen, etc. La cantidad de trabajo acumulado en el intervalo $[0, t]$ sería

$$X_t = \int_0^t Y_s \, ds.$$

Al asumir que X_t es un proceso de incrementos estacionarios estamos suponiendo que la distribución de la cantidad de trabajo Y_s que llega en un intervalo debe ser estacionario es decir sólo depende de la longitud del mismo. Las fuentes que cumplen esta propiedad son fuentes estacionarias.

Definición 1 *Se define la función ancho de banda efectivo de una fuente estacionaria como:*

$$\alpha(s,t) = \frac{1}{st} \log \mathbf{E} e^{sX_t} \qquad 0 < s, t < \infty, \tag{1}$$

donde X_t es el trabajo que produce la fuente en el intervalo $[0, t]$, y s y t son parámetros de escala.

El ancho de banda efectivo cuenta con propiedades que lo hacen interesante en la aplicación al estudio de redes de datos, por ejemplo tiene una operatoria muy simple para una operación crucial en el multiplexado como es el agregado de fuentes, ya que es aditivo respecto de la superposición de fuentes independientes, su valor está siempre entre la tasa media y la tasa máxima de transmisión y para un flujo de velocidad constante equivale al ancho de banda.

Para definir entonces Flujo Markoviano consideremos Y_s una cadena de Markov en tiempo continuo, homogénea, irreducible y con espacio de estados finito $E = \{h_1, \cdots, h_m\}$, donde h_i es un número real. Si consideramos que este valor representa la velocidad con que una fuente envía datos, definimos Flujo Markoviano modulado por Y_s, al proceso $X_t = \int_0^t Y_s \, ds$.

Por las condiciones impuestas a la cadena Y_s, se deduce que existe una única distribución invariante π, en consecuencia, si se toma como distribución inicial de la cadena la distribución invariante, Y_s resulta un proceso estacionario, el proceso X_t resulta de incrementos estacionarios y representa el trabajo acumulado en el intervalo $[0, t]$ recibido por una fuente que envía datos a una cierta velocidad. Los estados h_i de la cadena Y_s representan la velocidad con que se acumula trabajo, dichas velocidades son constantes y cambian según cambia de estados la cadena Y_s, por lo tanto el proceso X_t tiene trayectorias lineales a trozos, continuas y con pendientes dadas por los estados h_i. La cadena Y_s se llama entonces cadena modulante.

En el siguiente teorema, que daremos sin demostración, Keisidis, Walrang y Chang presentaron en [6] una expresión para el ancho de banda efectivo de un Flujo Markoviano X_t definido como antes. La expresión depende del generador infinitesimal de la cadena modulante Y_s, de los estados de la misma y de su distribución invariante.

Teorema 1 *Sea $\{X_t\}_{t\geq 0}$ un flujo markoviano modulado por la cadena de Markov irreducible homogénea Y_t definida como antes, con generador infinitesimal Q^Y y espacio de estados $0 \leq h_1 < h_2 \cdots < h_m$. Sea $\mathbb{H}$ una matriz diagonal con $H_{ii} = h_i$, π la distribución invariante de la cadena y $\mathbf{1}$, un vector columna con todas las entradas iguales a 1.*

Entonces:

$$\alpha(s,t) = \frac{1}{st} \log \left\{ \pi \exp \left[\left(\mathbb{Q}^Y + s\mathbb{H} \right) t \right] \mathbf{1} \right\}.$$

Es importante resaltar que en la demostración del teorema anterior no se utiliza en ningún momento que la distribución inicial fuera la invariante, esta hipótesis sólo es necesaria para que el proceso X_t sea de incrementos estacionarios y por lo tanto tenga sentido calcular el ancho de banda efectivo.

3. Generalización para tasas de transferencias aleatorias

En esta sección generalizamos el modelo para el caso en que la fuente puede asumir distintos estados y la velocidad con que despacha información es una variable aleatoria, continua o discreta, que depende del estado en que se encuentra la fuente.

Más precisamente, sea Z_s una cadena de Markov homogénea, a tiempo continuo e irreducible, con espacio de estados $\mathcal{K} = \{1, \cdots, k\}$ y distribución inicial igual a la distribución invariante π, y sean $f_1, f_2, \cdots, f_k$, k leyes de probabilidad distintas. Cuando la cadena Z_s alcanza el estado i, en lugar de despachar a una tasa constante, se sortea -independientemente de todo otro sorteo- una variable según la ley f_i, y se dice que Y_s toma dicho valor sorteado mientras Z_s no cambie de estado.

En otras palabras, sea $\tau_i^{(j)}$ el instante en que Z_s alcanza por j-ésima vez el estado i, y $\sigma_i^{(j)}$ el instante en que Z_s sale por j-ésima vez el estado i. Suponiendo además $\sigma_i^{(j)} > \tau_i^{(j)}$, resulta $Z_s = i$ durante $\left[\tau_i^{(j)}, \sigma_i^{(j)}\right)$ correspondiente a la j-ésima visita de Z al estado i, entonces Y_s toma el valor sorteado según la ley f_i para todo $s \in \left[\tau_i^{(j)}, \sigma_i^{(j)}\right)$, y el flujo markoviano modulado por el proceso Y_s resulta nuevamente

$$X_t = \int_0^t Y_s \; ds.$$

El objetivo es calcular el ancho de banda efectivo asociado al flujo X_t, con una fórmula del tipo a la obtenida por Kesidis, Walrand y Chang.

Trataremos separadamente el caso en que cada f_i está concentrada en una cantidad finita de valores $\{h_i^1, \cdots, h_i^{L_i}\}$ y el caso en que cada f_i es una función de densidad con soporte $[c_i, c_{i+1}) \subset \mathbb{R}^+$ para $c_i < c_{i+1}$.

3.1. Caso Discreto

Dada Z_s una cadena de Markov irreducible homogénea con espacio de estados $\mathcal{K} = \{1, 2, \cdots k\}$ y distribución invariante π, comenzamos considerando el caso en que Y_s se sortea según la ley f_i concentrada en los valores $\mathcal{H}_i = \{h_i^1, \cdots, h_i^{L_i}\}$, tomando con probabilidad positiva, uno de estos valores todo el tiempo que la cadena Z_s esté en el estado i. Más precisamente $f_i(u) = P(Y_s = u / Z_s = i)$, com primer momento μ_i.

Llamamos $\mathcal{H} = \{h_i^j \,:\, 1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq L_i\}$, al conjunto de los posibles valores que toma Y_s y definimos la matriz diagonal $\mathbb{H}$ como una matriz de dimensión k, cuyos elementos no nulos son los primeros momentos de cada distribución.

El siguiente teorema proporciona una fórmula para el cálculo del ancho de banda efectivo de un proceso con estas características.

Teorema 2 *Sea $\{X_t\}_{t\geq 0}$ un flujo markoviano modulado por la cadena de Markov irreducible homogénea Z_t con distribución invariante π y generador infinitesimal las variables Q^Z . Sean las aleatorias Y_t y la matriz diagonal $\mathbb{H}$, de dimensión k, definidas como antes, entonces:*

$$\alpha(s,t) = \frac{1}{st} \log \left\{ \pi \exp \left[\left(\mathbb{Q}^Z + s\mathbb{H} \right) t \right] \mathbf{1} \right\},$$

donde $\mathbf{1}$ es un vector columna con todas las entradas iguales a 1.

Prueba. Por la definición de ancho de banda efectivo de una fuente estacionaria presentada en (1) basta probar que

$$E\left(e^{sX_t}\right) = \pi \exp \left[\left(\mathbb{Q}^Z + s\mathbb{H} \right) t \right] \mathbf{1}.$$

Dado que $X_t = \int_0^t Y_s \, ds$ y escribiendo la integral como límite de sumas de Riemann, tenemos que

$$E\left(e^{sX_t}\right) = E\left(e^{s \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{r=1}^{n} Y_{\frac{rt}{n}} \frac{t}{n}} \right) = E\left(\lim_{n\to\infty} e^{s \sum\limits_{r=1}^{n} Y_{\frac{rt}{n}} \frac{t}{n}} \right).$$

Puesto que $|Y_s| \leq \max\limits_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq L_i}} \{h_i^j\} \leq \infty$, tenemos que $|X_t| \leq \displaystyle\int_0^t |Y_s| ds \leq t \max\limits_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq L_i}} \{h_i^j\} \leq \infty$, y por lo tanto $e^{sX_t} < \infty$.

Aplicando el teorema de convergencia dominada resulta

$$E\left(e^{sX_t}\right) = \lim_{n\to\infty} E\left(e^{s\frac{t}{n} \sum\limits_{r=1}^{n} Y_{\frac{rt}{n}}} \right).$$

Como la variable $e^{s\frac{t}{n} Y_{\frac{rt}{n}}}$ es discreta

$$E\left(e^{s\frac{t}{n} \sum\limits_{r=1}^{n} Y_{\frac{rt}{n}}} \right) = \sum_{(u_1,\cdots,u_n)\in\mathcal{H}^n} e^{s\frac{t}{n} \sum\limits_{r=1}^{n} u_r} P(Y_{\frac{t}{n}} = u_1, \cdots, Y_{\frac{tn}{n}} = u_n).$$

Como

$$\begin{aligned}
P(Y_{\frac{t}{n}} = u_1, \cdots, Y_{\frac{tn}{n}} = u_n) &= \sum_{(i_0,\cdots,i_n)\in\mathcal{K}^n} P(Y_{\frac{t}{n}} = u_1, \cdots, Y_{\frac{tn}{n}} = u_n / Z_{\frac{t}{n}} = i_1, \cdots, Z_{\frac{tn}{n}} = i_n). \\
&\quad .P(Z_{\frac{t}{n}} = i_1, \cdots, Z_{\frac{tn}{n}} = i_n) \\
&= \sum_{(i_0,\cdots,i_n)\in\mathcal{K}^n} P(Y_{\frac{t}{n}} = u_1 / Z_{\frac{t}{n}} = i_1). \cdots .P(Y_{\frac{tn}{n}} = u_n / Z_{\frac{tn}{n}} = i_n). \\
&\quad .P(Z_{\frac{t}{n}} = i_1, \cdots, Z_{\frac{tn}{n}} = i_n) \\
&= \sum_{(i_0,\cdots,i_n)\in\mathcal{K}^n} \prod_{j=1}^{n} f_{i_j}(u_j) P(Z_{\frac{t}{n}} = i_1, \cdots, Z_{\frac{tn}{n}} = i_n),
\end{aligned}$$

y Z_s es una cadena de Markov homogénea con distribución invariante π, tenemos que

$$\begin{aligned} E\left(e^{s\frac{t}{n}\sum_{r=1}^{n} Y_{\frac{rt}{n}}} \right) &= \sum_{(u_1,\cdots,u_n)\in\mathcal{H}^n} \prod_{r=1}^{n} e^{s\frac{t}{n}u_r} \sum_{(i_0,i_1,\cdots,i_n)\in\mathcal{K}^{n+1}} \pi(i_o) \prod_{j=0}^{n-1} P^Z_{\frac{t}{n}}(i_j,i_{j+1}) f_{i_{j+1}}(u_{j+1}) \\ &= \sum_{(i_0,i_1,\cdots,i_n)\in\mathcal{K}^{n+1}} \pi(i_o) \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{(u_1,\cdots,u_n)\in\mathcal{H}^n} e^{\frac{st}{n}u_{j+1}} f_{i_{j+1}}(u_{j+1}) P^Z_{\frac{t}{n}}(i_j,i_{j+1}). \end{aligned}$$

Cada sumatoria en la última expresión representa la función generadora de momento de la variable con distribución $f_{i_{j+1}}$ que la notaremos $\phi_{i_{j+1}}\left(\frac{st}{n}\right) = \sum_{(u_1,\cdots,u_n)\in\mathcal{H}^n} e^{\frac{st}{n}u_{j+1}} f_{i_{j+1}}(u_{j+1})$, con lo que tenemos que

$$E\left(e^{s\frac{t}{n}\sum_{r=1}^{n} Y_{\frac{rt}{n}}} \right) = \sum_{(i_0,i_1,\cdots,i_n)\in\mathcal{K}^{n+1}} \pi(i_0) \prod_{j=0}^{n-1} a_{\frac{t}{n}}(i_j,i_{j+1}),$$

donde $a_{\frac{t}{n}}(i,j) = \phi_i\left(\frac{st}{n}\right) P^Z_{\frac{t}{n}}(i,j)$ son los elementos de la matriz $A_{\frac{t}{n}}$ de dimensión k. El término de la derecha se puede expresar como producto de matrices de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \sum_{(i_0,i_1,\cdots,i_n)\in\mathcal{K}^{n+1}} \pi(i_0) \prod_{j=0}^{n-1} a_{\frac{t}{n}}(i_j,i_{j+1}) &= \sum_{(i_0,i_n)\in\mathcal{K}^2} \pi(i_0)(A^n_{\frac{t}{n}})_{i_0,i_n} \\ &= \sum_{i_0\in\mathcal{K}} \pi(i_0) \sum_{i_n\in\mathcal{K}} (A^n_{\frac{t}{n}})_{i_0,i_n} \\ &= \pi A^n_{\frac{t}{n}} \mathbf{1}, \end{aligned}$$

donde π es la distribución invariante de la cadena Z y $\mathbf{1}$ es un vector columna con las k entradas iguales a 1.

A su vez la matriz $A_{\frac{t}{n}}$ puede escribirse como el producto de las matrices $\left(P^Z_{\frac{t}{n}}\right)_{i,j} = P^Z_{\frac{t}{n}}(i,j)$, y

$$\left[C_{\frac{t}{n}}\right]_{k\times k} = \begin{bmatrix} \phi_1\left(\frac{st}{n}\right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \phi_k\left(\frac{st}{n}\right) \end{bmatrix}.$$

Cada una de estas matrices admite los siguientes desarrollos de Taylor

$$P^Z_{\frac{t}{n}} = P^Z_0 + (P^Z_t)'_{t=0}.\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right) = I + \mathbb{Q}^Z.\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right),$$

$$C_{\frac{t}{n}} = C_0 + (C_t)'_{t=0}.\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right) = I + s\mathbb{H}.\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right),$$

donde I es la matriz identidad de dimensión k. Luego,

$$\left[A_{\frac{t}{n}}\right]^n = \left[I + \left(\mathbb{Q}^Z + s\mathbb{H}\right).\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n,$$

y puesto que

$$\left[I + \left(\mathbb{Q}^Z + s\mathbb{H}\right)\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\left[\left(\mathbb{Q}^Z + s\mathbb{H}\right)t\right],$$

se tiene que

$$E\left(e^{s\frac{t}{n}\sum_{r=1}^{n} Y_{\frac{rt}{n}}}\right) = \pi A^n_{\frac{t}{n}} \mathbf{1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi \exp\left[\left(\mathbb{Q}^Z + s\mathbb{H}\right) t\right] \mathbf{1},$$

lo que concluye el teorema. $\square$

3.2. CASO CONTINUO

Consideremos ahora el caso en que la tasa de transferencia Y_s es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidades f_i, todo el tiempo que la cadena Z_s esté en el estado i. Supongamos además que tiene soporte $[c_i, c_{i+1}) \subset \mathbb{R}^+$ $c_i < c_{i+1}$, primer momento μ_i y transformada de Laplace $\phi_i(t)$ con derivada finita en $t = 0$. Recordemos que la cadena Z_s tiene como espacio de estados el conjunto $\mathcal{K} = \{1, 2, \cdots k\}$ y definimos la matriz diagonal $\mathbb{H}$ de dimensión k como una matriz cuyos elementos no nulos son: $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$, los primeros momentos de cada distribución. Un resultado similar al anterior, para el cálculo del ancho de banda efectivo, se obtiene a partir del siguiente teorema.

Teorema 3 *Sea $\{X_t\}_{t\geq 0}$ un flujo markoviano modulado por la cadena de Markov irreducible homogénea Z_t con distribución invariante π y generador infinitesimal las variables Q^Z . Sean las aleatorias Y_t y la matriz diagonal $\mathbb{H}$, de dimensión k, definidas como antes, entonces:*

$$\alpha(s,t) = \frac{1}{st} \log\left\{\pi \exp\left[\left(\mathbb{Q}^Z + s\mathbb{H}\right) t\right] \mathbf{1}\right\},$$

donde $\mathbf{1}$ es un vector columna con todas las entradas iguales a 1.
Prueba.

Por la definición de ancho de banda efectivo de una fuente estacionaria presentada en (1) basta probar que

$$E\left(e^{sX_t}\right) = \pi \exp\left[\left(\mathbb{Q}^Z + s\mathbb{H}\right) t\right] \mathbf{1}.$$

Dado que $X_t = \int_0^t Y_s \, ds$ y escribiendo la integral como límite de sumas de Riemann, tenemos que

$$E\left(e^{sX_t}\right) = E\left(e^{s \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} Y_{\frac{rt}{n}} \frac{t}{n}}\right) = E\left(\lim_{n\to\infty} e^{s\sum_{r=1}^{n} Y_{\frac{rt}{n}} \frac{t}{n}}\right).$$

Puesto que $|Y_s| \leq \max_{1\leq i\leq k} c_{i+1} \leq \infty$, tenemos que $|X_t| \leq \int_0^t |Y_s| ds \leq t \max_{1\leq i\leq k} c_{i+1} \leq \infty$, y por lo tanto $e^{sX_t} < \infty$.

Aplicando el teorema de convergencia dominada resulta

$$E\left(e^{sX_t}\right) = \lim_{n\to\infty} E\left(e^{s\frac{t}{n}\sum_{r=1}^{n} Y_{\frac{rt}{n}}}\right).$$

Como la variable $e^{s\frac{t}{n} Y_{\frac{rt}{n}}}$ es continua y además Z_s es una Cadena de Markov Homogénea con distribución invariante π, tenemos que

$$E\left(e^{s\frac{t}{n}\sum_{r=1}^{n} Y_{\frac{rt}{n}}}\right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in\mathcal{K}^n} \int_{(\mathbb{R}^+)^n} e^{s\frac{t}{n}\sum_{r=1}^{n} u_r} P(Z_{\frac{t}{n}} = i_1, \cdots, Z_{\frac{tn}{n}} = i_n) f_{i_1}(u_1)du_1 \cdots f_{i_n}(u_n)du_n \\
&= \sum_{(i_0,\cdots,i_n)\in\mathcal{K}^{n+1}} \int_{(\mathbb{R}^+)^n} \prod_{r=1}^{n} e^{\frac{st}{n}u_r}\ \pi(i_0) \prod_{j=0}^{n-1} \left(P^Z_{\frac{t}{n}}(i_j,i_{j+1}) f_{i_{j+1}}(u_{j+1})du_{j+1}\right) \\
&= \sum_{(i_0,\cdots,i_n)\in\mathcal{K}^{n+1}} \pi(i_0) \left[\prod_{j=0}^{n-1}\left(P^Z_{\frac{t}{n}}(i_j,i_{j+1}) \int_{(\mathbb{R}^+)} e^{\frac{st}{n}u_{j+1}} f_{i_{j+1}}(u_{j+1})du_{j+1}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Cada integral en la última expresión representa la función generadora de momento de la distribución que la notaremos $\phi_{i_j}\left(\frac{st}{n}\right) = \int_{(\mathbb{R}^+)} e^{\frac{st}{n}u_j} f_{i_j}(u_j)du_j$ y ya que f_{i_0} es una función de densidad, tenemos que

$$
E\left(e^{s\frac{t}{n}\sum_{r=1}^{n} Y_{\frac{rt}{n}}}\right) = \sum_{(i_0,\cdots,i_n)\in\mathcal{K}^{n+1}} \pi(i_0) \int_{(\mathbb{R}^+)} \prod_{j=0}^{n-1} a_{\frac{t}{n}}(i_j,i_{j+1}),
$$

donde $a_{\frac{t}{n}}(i_j,i_{j+1}) = \phi_{i_{j+1}}\left(\frac{st}{n}\right) P^Z_{\frac{t}{n}}(i_j,i_{j+1})$ son los elementos de la matriz cuadrada $A_{\frac{t}{n}}$. El término de la derecha se puede expresar como producto de matrices de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
\sum_{(i_0,\cdots,i_n)\in\mathcal{K}^{n+1}} \pi(i_0) \int_{(\mathbb{R}^+)} \prod_{j=0}^{n-1} a_{\frac{t}{n}}(i_j,i_{j+1}) &= \sum_{(i_0,i_n)\in\mathcal{K}^2} \pi(i_0)\ (A^n_{\frac{t}{n}})_{i_0,i_n} \\
&= \sum_{i_0\in\mathcal{K}} \pi(i_0) \sum_{i_n\in\mathcal{K}} (A^n_{\frac{t}{n}})_{i_0,i_n} \\
&= \pi\ A^n_{\frac{t}{n}} \mathbf{1},
\end{aligned}
$$

donde π es la distribución invariante de la cadena Z y $\mathbf{1}$ es un vector columna con las k entradas iguales a 1.

A su vez la matriz $A_{\frac{t}{n}}$ puede escribirse como el producto de las matrices $\left(P^Z_{\frac{t}{n}}\right)_{i,j} = P^Z_{\frac{t}{n}}(i,j)$, y

$$
\left[C_{\frac{t}{n}}\right]_{k\times k} = \begin{bmatrix} \phi_1\left(\frac{st}{n}\right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \phi_k\left(\frac{st}{n}\right) \end{bmatrix}.
$$

Cada una de estas matrices admiten los siguientes desarrollos de Taylor

$$
P^Z_{\frac{t}{n}} = P^Z_0 + (P^Z_t)'_{t=0}.\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right) = I + \mathbb{Q}^Z.\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right),
$$

$$
C_{\frac{t}{n}} = C_0 + (C_t)'_{t=0}.\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right) = I + s\mathbb{H}.\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right),
$$

donde I es la matriz identidad de dimensión k, y la matriz $\mathbb{H}$ contiene en su diagonal las derivadas $\phi_i^{'}(0) = \mu_i$. Luego,

$$
\left[A_{\frac{t}{n}}\right]^n = \left[I + \left(\mathbb{Q}^Z + s\mathbb{H}\right).\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n,
$$

y puesto que

$$
\left[I + \left(\mathbb{Q}^Z + s\mathbb{H}\right).\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\left[\left(\mathbb{Q}^Z + s\mathbb{H}\right)t\right],
$$

se tiene que

$$E\left(e^{s\frac{t}{n}\sum_{r=1}^{n} Y_{\frac{rt}{n}}}\right) = \pi A_{\frac{t}{n}}^{n}\mathbf{1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi \exp\left[\left(\mathbb{Q}^{Z} + s\mathbb{H}\right)t\right]\mathbf{1},$$

lo que concluye el teorema. □

4. Conclusiones

En este trabajo se extendió el cálculo del ancho de banda efectivo de flujos Markovianos, para el caso que las tasas de transferencias son variables aleatorias. Las fórmulas obtenidas son análogas a las obtenidas por Kesidis, Walrand y Chang, dependen del generador infinitesimal y de la distribución invariante de la cadena modulante, pero la información que interviene en la matriz $\mathbb{H}$ es diferente, ahora $\mathbb{H}$ contendrá los valores de las tasas medias de transferencias.

Utilizando los estimadores de máxima verosimilitud de generador infinitesimal de la cadena modulante, en [1] se presenta un estimador consistente para el ancho de banda efectivo de flujos Markovianos así como intervalos de confianza. En futuros trabajos se espera poder encontrar tanto un estimador consistente como intervalos de confianza para los modelos de tasas de transferencia aleatorias presentados en este trabajo.

Referencias

[1] L. Aspirot, P. Belzarena, P. Bermolen, A. Ferragut, G. Perera and M. Simon, *Quality of service parameters and link operating point estimation based on effective bandwidths*, Perfomance Evaluations 59 (2005), pp. 103-120.

[2] P. Billignsley. *Convergence of Probability Measures*, Wiley and Sons. (1968).

[3] C. Courcoubetis and R. Weber, *Buffer overflow asymptotics for a switch handling many traffic sources*, Journal of Applied Probability. 33.(1996).

[4] R.J. Gibbens, *Traffics characterisation and effective bandwidthsfor broadband betwork traces. Stochastics Netwoks: Theory and applications*, Oxford University Press, Oxford. (1996).

[5] F. Kelly. *Notes on effective bandwidths. Stochastics Netwoks: Theory and applications*, Oxford University Press, Oxford. (1996).

[6] G. Kesidis, J. Walrand, and C.S. Chang, *Effective bandwidth for multiclass Markov fluids and other ATM sources*, IEEE ACM Trans. Networking 1,4,(1993) pp. 424-428.

[7] J. Pechiar, G. Perera and M. Simón, *Effective bandwidth estimation and testing for Markov sources* Performance Evaluation. 45 (2002), pp. 157-175.

[8] G. de Veciana and J. Walrand, *Effective bandwidths. Call admission, traffic policing and filtering for ATM netwoks*, Queueing Syst. 20 (1995), pp.37-59.