REPRESENTACION POR CONJUNTOS DE GRUPOS ORDENADOS.

N. G. Martínez.

En trabajos anteriores hemos desarrollado una teoría de dualidad topológica para ciertas algebras provenientes de la Lógica [3] y para la teoría de los grupos reticulados [4].

En todos los casos, las estructuras algebraicas consideradas podían pensarse como reticulados distributivos con operaciones adicionales, por lo cual nuestra dualidad se basa en los espacios de Priestley [3], o en una variante de los espacios de Stone [4]. Hay, sin embargo, una parte de la teoría que podemos reproducir para los grupos ordenados y que permite obtener una representacion por conjuntos para dichos grupos, con el orden dado por la inclusion usual.

Sea $G = \langle G, ., ^{-1}, e, \leq \rangle$ un grupo ordenado. Sea $C(G)$ la familia de los subconjuntos *crecientes* de G (i.e., $P \in C(G)$ ssi $a \in P$ y $a \leq b$ implica $b \in P$). Nótese que $\emptyset, G \in C(G)$. Puede verse facilmente que si $P \in C(G)$, $a \in G$ y definimos $Pa = \{ x \in G : x^{-1} a \in P \}$, entonces $Pa \in C(G)$.

En particular, para $a=e$, queda definida una funcion unaria $g: C(G) \to C(G)$ tal que $g(P)=Pe$.

En $C(G)$ puede definirse también la siguiente funcion binaria $\Phi: C(G) \times C(G) \to C(G)$ tal que $y \in \Phi(P,Q)$ ssi existe $x \in P$ tal que $x^{-1} y \in Q$. Resulta, en efecto, que si $P, Q \in C(G)$, $\Phi(P,Q) \in C(G)$.

Definición: Sea $S(G)$ una familia de subconjuntos crecientes de G. Diremos que $S(G)$ es <u>espectral</u> ssi:

i) Dados $a,b,\in G$ tales que $a \not\leq b$, existe $P \in S(G)$ tal que $a \in P$ y $b \notin P$.

ii) Si $P \in S(G)$ y $a \in G$, $Pa \in S(G)$

iii) Si $P,Q \in S(G)$, $\Phi(P,Q) \in S(G)$.

De acuerdo a esta definición, $C(G)$ es espectral y es la mayor de las familias espectrales de G.

<u>Teorema de representacion:</u> Sea $G = \langle G, \cdot, {}^{-1}, e, \leq \rangle$ un grupo ordenado y $S(G)$ una familia espectral para G. Definamos, para cada $a \in G$, $\sigma(a) = \{P \in S(G) = a \in P\}$ y sea $\Sigma(S(G)) = \{\sigma(a) : a \in G\}$.

Entonces la función $a \to \sigma(a)$ establece un isomorfismo de orden entre los conjuntos ordenados $\langle G, \leq \rangle$ y $\langle \Sigma(S(G)), \subseteq \rangle$. Más aún, definiendo

(*) $(\sigma(a))^{-1} = S(G) \setminus g^{-1}[\sigma(a)]$ y

(**) $(\sigma(a))^{-1} . \sigma(b) = \max \{W \subseteq S(G) : \sigma(a) \times W \subseteq \Phi^{-1}[\sigma(b)]\}$,

se tiene

i) $\sigma(a^{-1}) = (\sigma(a))^{-1}$;

ii) $\sigma(a^{-1} . b) = (\sigma(a))^{-1} . \sigma(b)$, de modo que $\langle \Sigma(S(G)), ., {}^{-1}, \sigma(e), \subseteq \rangle$ es un grupo ordenado isomorfo a G.

La demostracion sigue, esencialmente, la dada en [4] para reticulados implicativos.

Este resultado abre paso a un interesante problema: nótese que $\Sigma(S(G))$, por ser una familia de conjuntos, puede ser extendida naturalmente a un reticulado distributivo, considerando todas las posibles uniones e intersecciones finitas de sus miembros. Llamemos $L(\Sigma)$ a este reticulado. Bajo que condiciones las funciones producto e inverso de $\Sigma(S(G))$ pueden extenderse a $L(\Sigma)$ de modo que $L(\Sigma)$ se convierta en un grupo reticulado? De acuerdo al Teorema de representación, una respuesta a este problema caracterizaría a los grupos ordenados que pueden ser extendidos a un grupo reticulado. La clave para una solución está en definir a una familia espectral adecuada y sera motivo de una futura investigación.

REFERENCIAS:

[1] Fuchs,L. Partially ordered algebraic systems. Addison-Wesley

[2] Kokorin,A.I and Kopytov,V.M. Fully ordered groups Wiley and sons. New York-Toronto.

[3] Martinez,N.G. Priestley duality for Wajsberg algebras. Studia Logica XLIX,1 1990.

[4] Martinez,N.G. Una dualidad topologica para estructuras algebraicas reticuladas (Tesis doctoral. Universidad Nacional de Buenos Aires, 1990).

Nestor G. Martinez

Depto.de Matemática.

Facultad de Ciencias

Exactas y Naturales.

Pabellón 1

Ciudad Universitaria.

Buenos Aires.