

DETERMINACION DE PUNTOS DE BIFURCACION DE HOPF

H. Cendra, G. Itovich, R. Salthú y A. Torresi

RESUMEN

En el presente artículo se realiza una *aproximación simplicial estable* del borde de la zona de Hurwitz (borde de la zona de estabilidad) en \mathbb{R}^4 , esto nos permite hallar mediante un método sistemático el conjunto de puntos de bifurcación de un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales dependientes de un parámetro.

INTRODUCCION

Dado un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales dependientes de un parámetro $\alpha \in \mathbb{R}^m$:

$$\dot{x} = A(\alpha)x, \quad A(\alpha) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

nos interesa ver el comportamiento del polinomio característico $P(\alpha, s) \equiv P_\alpha(s)$ de $A(\alpha)$ cuando variamos α (llamado *parámetro de bifurcación*).

En particular esta cuestión es de interés cuando se trata de hallar los puntos de equilibrio $x_0 = x_0(\alpha) \in \mathbb{R}^n$ de un sistema no lineal $\dot{x} = f(x, \alpha)$ que son *puntos de bifurcación de Hopf*. En este caso tomando $A(\alpha) = D_x(x_0, \alpha)$, los valores de α para los cuales $x_0(\alpha)$ es un punto de bifurcación de Hopf deben satisfacer la siguiente *condición necesaria*: un par de autovalores no nulos de $A(\alpha)$ deben ser imaginarios puros y el resto deben ser estables (i.e. con parte real negativa). A su vez esta última cuestión se puede encarar de un modo sistemático como sigue. Pensando un polinomio $a(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n$ de grado n como un punto de \mathbb{R}^n , se comienza describiendo la *zona de Hurwitz* H^n (ver definición I de §I.). El borde de dicha zona ∂H^n se descompone como reunión disjunta $\partial H^n = \partial H_1^n \cup \partial H_2^n$, donde ∂H_1^n

consta de los polinomios de $\partial\bar{H}^n$ que admiten un factor $(s^2+\lambda)$, $\lambda>0$. Sea $a(\alpha,\lambda) \in \mathbb{R}^n$ el polinomio característico de $A(\alpha)$. Los puntos de bifurcación de Hopf son puntos de intersección de la hipersuperficie dada paramétricamente por $a(\alpha,\lambda)$, con $\partial\bar{H}_1$. De acuerdo con la información que poseemos no existe un método sistemático para encarar la solución numérica de éste problema.

En el presente trabajo damos un método para $n=4$, basado en la construcción de una triangulación estable (i.e. contenida en H^4) de $\partial\bar{H}_1^4$. Luego dicha triangulación se interseca con una triangulación de la hipersuperficie $a(\alpha,\lambda)$. Finalmente, afinando las triangulaciones (o aproximaciones simpliciales) se obtienen aproximaciones cada vez mejores de la solución.

Se debe hacer notar que el problema análogo para el caso de H^3 , a saber hallar una triangulación estable de $\partial\bar{H}^3$, es relativamente trivial. En efecto se ve enseguida que un polinomio $a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + s^3 \in \partial\bar{H}^3$ si y sólo si $a_0 = a_1 a_2$, donde $a_1, a_2 > 0$. La triangulación de $\partial\bar{H}^3$ se logra entonces fácilmente así: Sea $h > 0$ dado, entonces los triángulos de vértices P_1, P_2, P_3 dados por

$$P_1 = \begin{cases} a_0 = m n h^2 \\ a_1 = m h \\ a_2 = n h \end{cases} \quad P_2 = \begin{cases} a_0 = (m \pm 1) n h^2 \\ a_1 = (m \pm 1) h \\ a_2 = n h \end{cases} \quad P_3 = \begin{cases} a_0 = m (n \pm 1) h^2 \\ a_1 = m h \\ a_2 = (n \pm 1) h \end{cases}$$

con m, n enteros, $m, n \geq 0$, forman una triangulación estable de $\partial\bar{H}^3$.

§I. PRELIMINARES

Definición : Sea $a(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + s^n \in \mathbb{R}[s]$ y sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ las raíces de $a(s)$. Diremos que $a(s)$ es un polinomio de Hurwitz (o estable) si $\text{Re}[\lambda_i] < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Identificando $a(s) \equiv (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = a \in \mathbb{R}^n$ definimos:

$$H^n = \{ a \in \mathbb{R}^n : a \text{ es un polinomio de Hurwitz} \}$$

al cual llamamos conjunto de Hurwitz.

Observación: Si $a \in H^n$ entonces $a_i > 0, i = 0, 1, \dots, n-1$.

Dado $a(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + s^n$, definimos

$$a^\circ(s) = a_0 + a_2 s + a_4 s^2 + \dots + a_{2l} s^l$$

$$a^\circ(s) = a_1 + a_3 s + \dots + a_{2f+1} s^f$$

donde $l=f=m$ si $n=2m+1$ y $l=m, f=m-1$ si $n=2m$.

Por ejemplo, si $n=4, a^\circ(s) = a_0 + a_2 s + s^2, a^\circ(s) = a_1 + a_3 s$.

Diremos que a° y a° tienen la *propiedad de entrelazamiento* si a° y a° tienen todas sus raíces reales y negativas y satisfacen la siguiente desigualdad

$$0 > \lambda_1^\circ > \lambda_1^\circ > \lambda_2^\circ > \lambda_2^\circ > \dots$$

donde λ_i° son las raíces de a° y λ_i° las de a° .

En el caso $n=4$, esta desigualdad se reduce a

$$0 > \lambda_1^\circ > \lambda_1^\circ > \lambda_2^\circ.$$

Tenemos el siguiente resultado de Routh-Hurwitz. (Ver [2]).

Teorema I Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) $a \in H^n$.
- ii) a°, a° tienen la propiedad de entrelazamiento.

Nos interesa describir el conjunto H^4 y especialmente su frontera, que notaremos ∂H^4 . Se puede deducir fácilmente del Teorema de Routh-Hurwitz que:

$$a \in H^4 \text{ si y sólo si } a_1(a_2 a_3 - a_1^2) - a_0 a_3^2 > 0, a_i > 0.$$

En lo que sigue nos proponemos describir ∂H^4 . Para ello observemos primero que si $a \in \bar{H}^4$ entonces

$$(1) \quad a(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + s^4 = \\ = (s^2 + \mu s + \lambda) (s^2 + b_1 s + b_0)$$

o equivalentemente con $\lambda, \mu, b_0, b_1 \geq 0$

$$(2) \quad \begin{array}{ll} a_0 = \lambda b_0 & a_2 = \lambda + \mu b_1 + b_0 \\ a_1 = \lambda b_1 + \mu b_0 & a_3 = \mu + b_1 \end{array}$$

Observemos que si $a \in \bar{H}^4$ entonces $a_i \geq 0$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Si uno o más de los parámetros λ, μ, b_0, b_1 se anulan, el polinomio $a(s)$ correspondiente pertenece a $\partial\bar{H}^4$. Analizaremos a continuación las diversas posibilidades utilizando (1) o (2).

a) Si $\lambda=0, \mu, b_0, b_1 > 0$ tenemos a partir de (1), $a(s) = s(s + \mu)(s^2 + b_1 s + b_0)$, o bien, de acuerdo a (2), $a_0 = 0, a_1 = \mu b_0, a_2 = \mu b_1 + b_0, a_3 = \mu + b_1$. Es fácil ver que estas ecuaciones determinan el conjunto

$$B_1 = \{ a \in \mathbb{R}^4 : a_0=0, a_1 < a_2 a_3, a_i > 0, i=1,2,3 \} \cong H^3.$$

b) Si $\lambda=\mu=0, b_0, b_1 > 0$ resulta $a(s) = s^2(s^2 + b_1 s + b_0)$ $a_0=0, a_1=0, a_2=b_0, a_3=b_1$ y el polinomio pertenece a

$$B_2 = \{ a \in \mathbb{R}^4 : a_0=a_1=0, a_2, a_3 > 0 \}$$

c) Si $\mu=b_0=0, \lambda, b_1 > 0$ entonces $a(s) = s(s + b_1)(s^2 + \lambda)$ $a_0=0, a_1=\lambda b_1, a_2=\lambda, a_3=b_1$ y el polinomio pertenece a

$$B_3 = \{ a \in \mathbb{R}^4 : a_0=0, a_1=a_2 a_3, a_i > 0, i=1,2,3 \}$$

d) Si $\mu=b_0=b_1=0, \lambda > 0$ el polinomio correspondiente es $a(s) = s^2(s^2 + \lambda)$ y $a_0=a_1=a_3=0, a_2=\lambda$, luego a pertenece a

$$B_4 = \{ a \in \mathbb{R}^4 : a_0=a_1=a_3=0, a_2 > 0 \}$$

e) Si $\mu=\lambda=b_0=0, b_1 > 0$, $a(s) = s^3(s + b_1)$, y $a_0=a_1=a_2=0, a_3=b_1$. Luego a pertenece a

$$B_5 = \{ a \in \mathbb{R}^4 : a_0=a_1=a_2=0, a_3 > 0 \}$$

Observación: $a \in B_k$, $1 \leq k \leq 5$ si, y sólo si $a(s) = s b(s)$, donde $b(s)$ es un polinomio en \bar{H}^3 . Indicaremos

$$\partial\bar{H}_2^4 = \bigcup_{k=1}^5 B_k$$

Resulta así

$$\partial\bar{H}_2^4 = \{ a \in \mathbb{R}[s] : a(s) = s b(s), b(s) \in \bar{H}^3 \}$$

f) Si $\mu=0, \lambda, b_0, b_1 > 0$, $a(s) = (s^2 + \lambda)(s^2 + b_1s + b_0)$
 $a_0 = \lambda b_0, a_1 = \lambda b_1, a_2 = \lambda + b_0, a_3 = b_1$ y a pertenece a

$$T_1 = \{ a \in \mathbb{R}^4 : a_1(a_2 a_3 - a_1) - a_0 a_3^2 = 0, a_i > 0 \}$$

g) Si $\mu=b_1=0, \lambda, b_0 > 0$, $a(s) = (s^2 + \lambda)(s^2 + b_0)$, $a_0 = \lambda b_0$,
 $a_1 = a_3 = 0, a_2 = \lambda + b_0$ entonces a pertenece a

$$T_2 = \{ a \in \mathbb{R}^4 : a_1 = a_3 = 0, a_0 \leq (1/4) a_2^2, a_i > 0 \ i=0,2 \}$$

Por lo tanto, $a \in T_k, k=1,2$ sí, y sólo si $a(s) = (s^2 + \lambda) b(s)$
 donde $b(s) \in \bar{H}^2$. Llamaremos

$$\partial \bar{H}^4 = T_1 \cup T_2$$

Entonces

$$\partial \bar{H}^4 = \{ a \in \mathbb{R}[s] : a(s) = (s^2 + \lambda) b(s), b(s) \in \bar{H}^2 \}$$

De esta manera, la frontera $\partial \bar{H}^4$ puede expresarse

$$\partial \bar{H}^4 = \partial \bar{H}_1^4 \cup \partial \bar{H}_2^4 \quad (\text{unión disjunta})$$

Observaciones

1. Obtenemos B_1 si hacemos $b_0=0, \lambda, \mu, b_1 > 0$.

2. Si $\lambda=b_0=0, \mu, b_1 > 0$ queda determinado el conjunto

$$A = \{ a \in \mathbb{R}^4 : a_0 = a_1 = 0, a_2 \leq (1/4) a_3^2, a_2, a_3 > 0 \}$$

contenido en B_2 . Observemos también que B_2 se obtiene haciendo
 $b_0=b_1=0$ y $\lambda, \mu > 0$.

3. Si $\lambda=b_1=0, \mu, b_0 > 0$ resulta B_3 .

4. El conjunto B_4 se obtiene si $\lambda=\mu=b_1=0, b_0 > 0$.

5. Si $\lambda=b_0=b_1=0, \mu > 0$ queda determinado B_5 .

6. Podemos obtener el conjunto T_1 si hacemos $b_1=0, \lambda, \mu, b_0 > 0$.

Finalmente observemos que T_2 queda determinado únicamente por las
 condiciones $\mu=b_1=0, \lambda, b_0 > 0$.

Nuestro primer paso hacia la aproximación simplicial estable
 de $\partial \bar{H}^4$ indicada en la introducción, será construir un prisma en el
 espacio λ, b_0, b_1 el cual se descompone en la reunión de una

pirámide de base triangular y una de base rectangular. Luego, se prueba que la imagen por la aplicación $a = f(\lambda, b_0, b_1)$ dada por

$$a_0 = \lambda b_0, \quad a_1 = \lambda b_1, \quad a_2 = \lambda + b_0, \quad a_3 = b_1$$

transforma los vértices de cada pirámide en los puntos de $\partial \bar{H}^4$ de tal modo que son a su vez vértices de correspondientes pirámides, las cuales están contenidas en \bar{H}^4 . Para ello usaremos el siguiente resultado conocido. (Ver [1]).

Teorema II *Un poliedro está contenido en \bar{H}^4 si, y sólo si lo están sus aristas..*

§II.

Sea $a = (\lambda b_0, \lambda b_1, \lambda + b_0, b_1) \in T_1$ y sean

$$P_\lambda = ((\lambda + \Delta\lambda) b_0, (\lambda + \Delta\lambda) b_1, \lambda + \Delta\lambda + b_0, b_1)$$

$$P_0 = (\lambda (b_0 + \Delta b_0), \lambda b_1, \lambda + b_0 + \Delta b_0, b_1)$$

$$P_1 = (\lambda b_0, \lambda (b_1 + \Delta b_1), \lambda + b_0, b_1 + \Delta b_1)$$

$$P_{01} = (\lambda (b_0 + \Delta b_0), \lambda (b_1 + \Delta b_1), \lambda + b_0 + \Delta b_0, b_1 + \Delta b_1)$$

$$P_{\lambda_1} = ((\lambda + \Delta\lambda) b_0, (\lambda + \Delta\lambda) (b_1 + \Delta b_1), \lambda + \Delta\lambda + b_0, b_1 + \Delta b_1)$$

puntos de $\partial \bar{H}^4$.

Observación $a = f(\lambda, b_0, b_1)$, $P_\lambda = f(\lambda + \Delta\lambda, b_0, b_1)$.

$P_0 = f(\lambda, b_0 + \Delta b_0, b_1)$, En lo que sigue, identificaremos (si ello no da lugar a confusión) $a \equiv (\lambda, b_0, b_1)$, $P_\lambda \equiv (\lambda + \Delta\lambda, b_0, b_1)$.

$P_0 \equiv (\lambda, b_0 + \Delta b_0, b_1)$, etc..

En primer lugar podemos verificar fácilmente que los segmentos $\overline{P_\lambda P_{\lambda_1}}$, $\overline{P_0 P_{01}}$, $\overline{a P_\lambda}$, $\overline{a P_0}$, $\overline{a P_1}$, $\overline{P_1 P_{\lambda_1}}$, $\overline{P_1 P_{01}}$ están contenidos en T_1 . (Ver figura I)

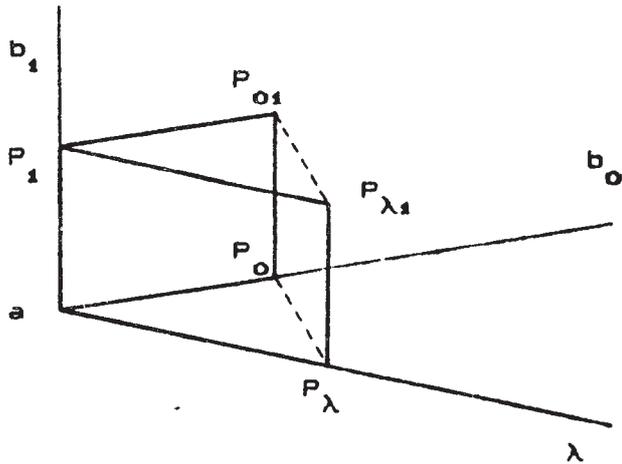


Figura I

Por ejemplo, consideremos el segmento $\overline{P_\lambda P_{\lambda_1}}$:
 $a(t) \in \overline{P_\lambda P_{\lambda_1}}$ sí, y sólo si $a(t) = (P_{\lambda_1} - P_\lambda) t + P_\lambda$, $0 \leq t \leq 1$.

Entonces,

$$a(t) = (a_0(t), a_1(t), a_2(t), a_3(t)) =$$

$$= ((\lambda + \Delta\lambda) b_0, (\lambda + \Delta\lambda) \Delta b_1 t + (\lambda + \Delta\lambda) b_1, \lambda + \Delta\lambda + b_0 \cdot \Delta b_1 t + b_1)$$

Observemos que $a_1(t) [a_2(t) a_3(t) - a_1(t)] - a_0(t) a_3^2(t) = 0$, para todo $t \in [0, 1]$. Por lo tanto, $a(t) \in T_1$, para todo $t \in [0, 1]$. Análogamente se procede con los restantes segmentos citados.

Examinemos ahora los segmentos $\overline{P_\lambda P_0}$ y $\overline{P_{\lambda_1} P_{01}}$. (Ver figura II)

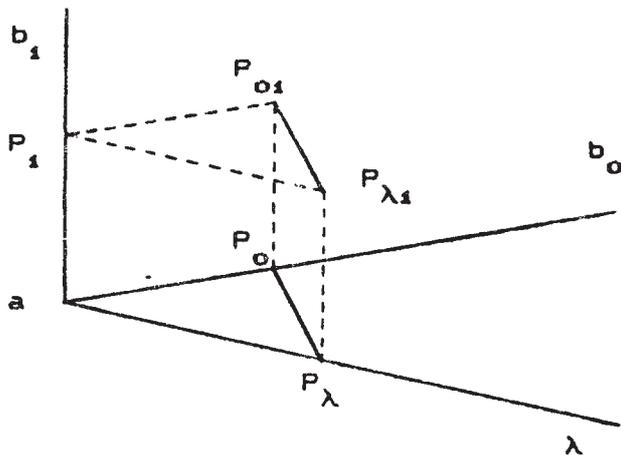


Figura II

Veamos por ejemplo el segmento $\overline{P_\lambda P_0}$. Sea $a(t) = (P_0 - P_\lambda) t + P_\lambda$ con $0 \leq t \leq 1$ un punto de $\overline{P_\lambda P_0}$.

$$\begin{aligned}
 a(t) &= (a_0(t), a_1(t), a_2(t), a_3(t)) = \\
 &= ((\lambda \Delta b_0 - \Delta \lambda b_0) t + (\lambda + \Delta \lambda) b_0, -\Delta \lambda b_1 t + (\lambda + \Delta \lambda) b_1, (\Delta b_0 - \Delta \lambda) t + \\
 &+ \lambda + \Delta \lambda + b_0, b_1) .
 \end{aligned}$$

Definamos

$$\varphi_\lambda^0(t) = a_1(t) [a_2(t)a_3(t) - a_1(t)] - a_0(t)a_3^2(t) = b_1^2 \Delta \lambda \Delta b_0 (-t^2 + t)$$

Es claro que $\overline{P_\lambda P_0} \subset H^4$ si, y sólo si $\varphi_\lambda^0(t) \geq 0 \forall t \in [0,1]$.
 $\varphi_\lambda^0(t)$ se anula en $t=0$ y $t=1$, luego $\varphi_\lambda^0(t) > 0$ ó $\varphi_\lambda^0(t) < 0$ en $(0,1)$.

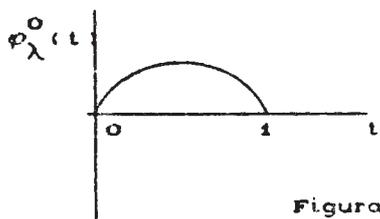


Figura III

$$\begin{aligned}
 \text{Pero } \varphi_\lambda^0(t) > 0 \text{ en } (0,1) &\iff \\
 \iff \frac{d\varphi_\lambda^0}{dt}(0) > 0 \text{ y } \frac{d\varphi_\lambda^0}{dt}(1) < 0 &\iff \\
 \iff \Delta \lambda \Delta b_0 > 0 . &
 \end{aligned}$$

En conclusión

$$\boxed{\overline{P_\lambda P_0} \subset H^4 \iff \Delta \lambda \Delta b_0 > 0}$$

Idem con el segmento $\overline{P_{\lambda_1} P_{01}}$.

Veamos los segmentos $\overline{P_\lambda P_1}$ y $\overline{P_\lambda P_{01}}$. (Ver figura IV)

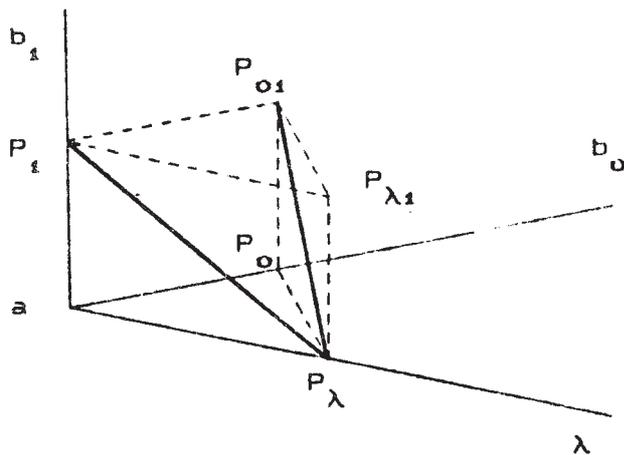


Figura IV

$$a(t) \in \overline{P_\lambda P_1} \iff a(t) = (P_1 - P_\lambda) t + P_\lambda, 0 \leq t \leq 1$$

$$\begin{aligned}
 a(t) &= (a_0(t), a_1(t), a_2(t), a_3(t)) = \\
 &= (-\Delta\lambda b_0 t + (\lambda + \Delta\lambda) b_0, (\lambda \Delta b_1 - \Delta\lambda b_1) t + (\lambda + \Delta\lambda) b_1, -\Delta\lambda t + \lambda + \Delta\lambda + \\
 &+ b_0, \Delta b_1 t + b_1)
 \end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned}
 \varphi_\lambda^1(t) &= a_1(t) [a_2(t)a_3(t) - a_1(t)] - a_0(t)a_3^2(t) = \\
 &= \Delta\lambda \Delta b_1 \{ [(\lambda - b_0) \Delta b_1 - b_1 \Delta\lambda] (-t^3 + t^2) + b_1 (\lambda + \Delta\lambda - b_0) (-t^2 + t) \}
 \end{aligned}$$

$$\text{Nuevamente, } \overline{P_\lambda P_1} \subset \overline{H^4} \iff \varphi_\lambda^1(t) \geq 0, \forall t \in [0, 1].$$

Observemos que $\varphi_\lambda^1(0) = \varphi_\lambda^1(1) = 0$.

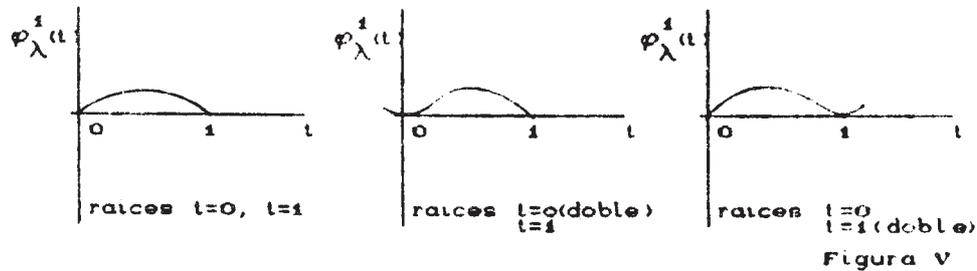


Figura V

Por lo tanto, $\varphi_\lambda^1(t) > 0, \forall t \in (0, 1) \iff$

$$\iff \frac{d\varphi_\lambda^1}{dt}(0) \geq 0 \text{ y } \frac{d\varphi_\lambda^1}{dt}(1) < 0 \text{ o } \frac{d\varphi_\lambda^1}{dt}(0) > 0 \text{ y } \frac{d\varphi_\lambda^1}{dt}(1) \leq 0.$$

Teniendo en cuenta la condición ya obtenida para el segmento $\overline{P_\lambda P_0}$, es decir $\Delta\lambda \Delta b_0 > 0$, podemos construir la siguiente tabla

sg. $\Delta\lambda$	sg. Δb_0	sg. Δb_1	$\overline{P_\lambda P_1} \subset \overline{H^4}$
+	+	+	$\lambda \geq b_0$
+	+	-	$\lambda + \Delta\lambda \leq b_0$
-	-	+	$\lambda \leq b_0$
-	-	-	$\lambda + \Delta\lambda \geq b_0$

En cuanto al segmento $\overline{P_{\lambda} P_{01}}$, se puede probar con cálculos similares a los ya realizados y con la hipótesis adicional $|\Delta b_0| = |\Delta b_1|$, que

$$\overline{P_{\lambda} P_1} \subset \overline{H^4} \Rightarrow \overline{P_{\lambda} P_{01}} \subset \overline{H^4}$$

Luego, si se cumplen las condiciones indicadas en la columna derecha de la tabla anterior automáticamente todas las aristas de las pirámides consideradas están contenidas en $\overline{H^4}$ y por consiguiente usando el teorema II resulta que dichas pirámides también están contenidas en $\overline{H^4}$.

Observación

Los mismos cálculos desarrollados anteriormente para $a \in T_1$ son también válidos si suponemos $a \in B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5$. Observemos que $\bigcup_{k=2}^5 B_k$ se identifica con $\partial \overline{H^3}$, donde $B_3 \equiv \partial \overline{H^3}_1$ (tapa de $\overline{H^3}$) mientras $B_2 \cup B_4 \cup B_5 \equiv \partial \overline{H^3}_2$ (base de $\overline{H^3}$).

Como $a \in T_1 \Leftrightarrow (\lambda, b_0, \lambda + b_0, b_1)$, los conjuntos B_2, B_3, B_4, B_5 se obtienen a partir de T_1 haciendo $\lambda=0, b_0=0, b_0=b_1=0$ y $\lambda=b_0=0$ respectivamente.

Nuestro próximo paso será cubrir el espacio λ, b_0, b_1 con pirámides. Por lo tanto, debemos ver la manera de "pegarlas" utilizando para ello las cuatro orientaciones de los prismas que figuran en la tabla.

Notación: Con P(+++) indicaremos el prisma con $\Delta\lambda > 0, \Delta b_0 > 0, \Delta b_1 > 0$. En forma análoga notaremos las otras orientaciones. Por ejemplo, P(---) representa el prisma con $\Delta\lambda < 0, \Delta b_0 < 0, \Delta b_1 > 0$. Consideremos el nivel $b_1 = \bar{b}_1$. La distribución de los prismas puede observarse en la figura VI.

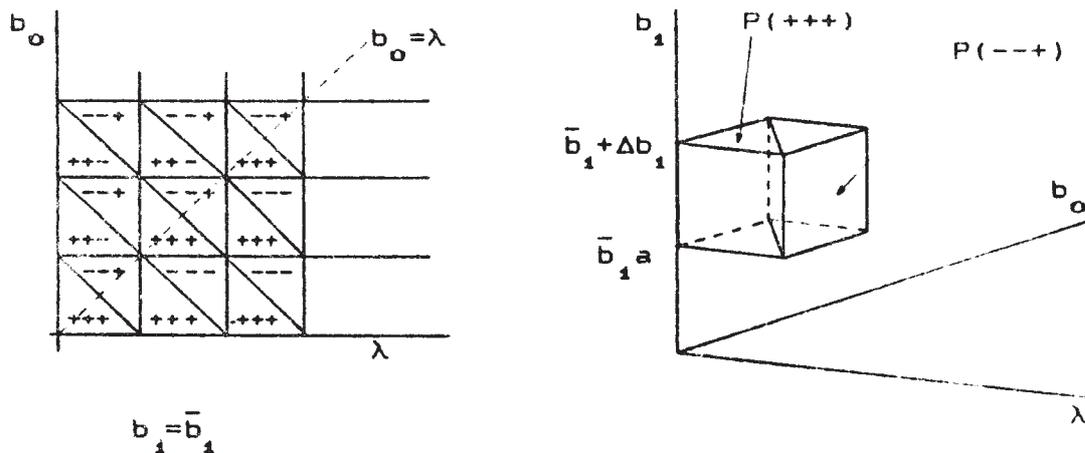


Figura VI

Sobre la bisectriz $b_0 = \lambda$, los prismas $P(--+)$ no llevan el segmento $\overline{P_\lambda P_{o1}}$, pues basta el segmento $\overline{P_\lambda P_{o1}}$ de los correspondientes prismas $P(+++)$ para determinar la triangulación. Esto se debe a que en este caso el segmento $\overline{P_\lambda P_{o1}}$ de $P(+++)$ no coincide con el segmento $\overline{P_\lambda P_{o1}}$ de $P(--+)$. Observemos que los puntos generadores a de ambos prismas pertenecen al nivel \bar{b}_1 .

Los puntos generadores de los prismas $P(++-)$ y $P(---)$ pertenecen al nivel $\bar{b}_1 + \Delta b_1$ ($\Delta b_1 > 0$).

Tomemos ahora como nuevo nivel a $\bar{b}_1 + \Delta b_1$ y distribuyamos los prismas de la misma forma que en el nivel anterior \bar{b}_1 . Continuando con este procedimiento, podremos cubrir todo el espacio λ, b_0, b_1 con pirámides.

Observación

En el nivel $b_1 = 0$, los prismas cuyas bases son simétricas respecto a la bisectriz $b_0 = \lambda$ tienen la misma imagen en el plano $a_0 a_2$ (región $a_0 \leq (1/4) a_2^2$). En particular, la base de los prismas $P(+++)$ y $P(--+)$ ubicados sobre la bisectriz $b_0 = \lambda$ se transforma en un "triángulo" donde uno de sus lados es parte de la parábola $a_0 = (1/4) a_2^2$ (ver figura VII). Todo es consecuencia del hecho que puntos simétricos respecto a $b_0 = \lambda$ tienen la misma imagen.

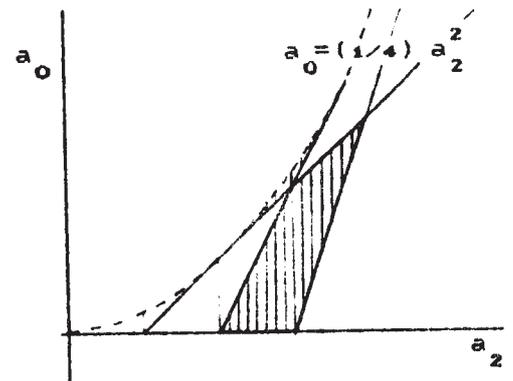
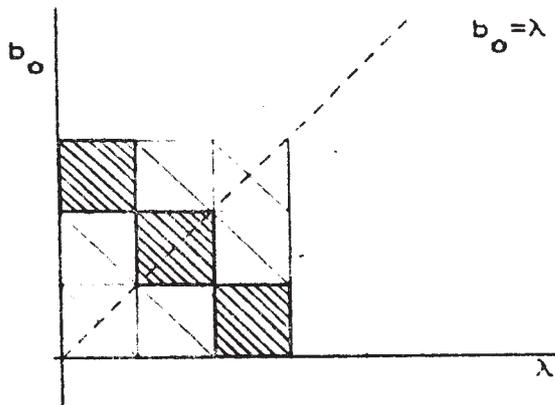


Figura VII

REFERENCIAS

- [1] A. C. Bartlett, C. V. Hollot y L. Lin, "Root locations of entire polytope of polinomials: its suffices to check the edges" *Mathem. of Contr. Signal and Systems*, vol. 1, pp. 61-71. 1987.
- [2] Gantmacher, F. R., "Theory of Matrices" Vol 1 and 2. Chelsea. Pub. Co. NY. 1960.